

**КАЗАРЯН Наре Артуровна,**

соискательница кафедры математики и методики ее преподавания,  
Армянский государственный педагогический университет имени Хачатура Абовяна;  
учитель математики, Международный научно-образовательный комплекс «Лицей Ширакаци»,  
Республика Армения  
e-mail: knare1990@mail.ru

УДК 373.5.091.33–027.22:51]:111.852(045)

**ОБ ЭСТЕТИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА ГУМАНИТАРНЫХ  
ПОТОКАХ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ**

*В статье рассматривается эстетика обучения математике, как путь повышения эффективности обучения математике на гуманитарных потоках.*

*Показано, что в условиях потокового обучения в старших школах из круга интересов учеников выпадают те учебные предметы, которые находятся вне области соответствующего потокового направления. Обычно эффективность обучения подобных предметов достаточно низка, следовательно, одним из направлений, компенсирующих этот недостаток, логично рассматривать эстетическое направление математической деятельности.*

**Ключевые слова:** процесс обучения математике; математическая задача; функции задач; объективные признаки научной красоты; субъективные признаки научной красоты; старшая школа; гуманитарный поток.

**Постановка задачи.** В настоящее время, как во многих странах, так и в Республике Армения, обучение в старшей школе осуществляется по дифференцированным потоковым программам. Наше исследование посвящено проблеме повышения эффективности обучения математике на гуманитарном потоке. Ученики этого потока демонстрируют незаинтересованность в обучении математике. Об этом свидетельствуют результаты проведенного опроса среди учеников гуманитарного потока старшей школы и учителей математики, преподающих на этом потоке. Причины разнообразны: неудовлетворительный уровень математической подготовки учеников гуманитарного потока, загруженность и сложность программного материала, отведенное время, слабо выраженный в учебниках прикладной фон, выбранный метод обучения, низкая мотивация и так далее.

Таким образом, картина следующая: процесс обучения математике на гуманитарном потоке протекает неэффективно. По нашему мнению, в вопросе повышения интереса учеников гуманитарного потока, а также повышения эффективности обучения математике будем иметь положительную динамику, если сделаем эстетичес-

кий потенциал математики и математического образования более очевидным, разработаем практические пути повышения эстетики обучения математике. В контексте данной статьи мы рассмотрим математическую задачу и особенности ее обучения на гуманитарных потоках старшей школы.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Эстетике математики и ее обучения посвящены многочисленные статьи [1–3], показана ее роль в повышении эффективности обучения. В работе [4] обобщены результаты этих работ. Ряд работ ([5], [6] и др.) посвящены эстетике математических задач. Результаты, полученные в данной работе, позволяют изучать влияние эстетики математической задачи на эффективность учебного процесса, в зависимости от математических наклонностей ученика.

**Содержание работы.** Во все времена в центре внимания исследователей, математиков, методистов находилась методика решения математической задачи, разработка эффективных путей обучения математической задаче, роль последней в формировании мышления и других психических качествах учеников. По данным вопросам имеется большое количество методической литературы, которая в целом способствовала повышению эффективности обучения математическим задачам. Однако при рассмотрении вопроса эффективности процесса обучения математическим задачам на гуманитарном потоке старшей школы мы видим, что в зависимости от уровня математической подготовки учеников, потребностей, мотивации и тому подобному, здесь есть необходимость в разработке новых подходов, направленных на повышение эффективности обучения математической задаче. По нашему мнению, интерес учеников гуманитарного потока старшей школы к математической задаче и ее обучению, а также эффективность обучения повысятся, если эстетика математической задачи и ее обучения станет очевидной.

Проблема эстетики математической задачи и ее обучения рассматривалась разными исследователями, которые обуславливали эстетику математической задачи и ее обучения в основном проявлением разных признаков научного прекрасного. М.С. Якир отмечает признаки неожиданности, непредсказуемости, ясности, оптимизма, наличия революционного шага в качестве показателя проявления эстетики математической задачи [5]. Г.С. Микаелян рассмотрел эстетику задачи, ее видов, функций задачи и так далее. Рассмотрев и обобщив признаки научного прекрасного, предложенных разными исследователями, он разделил их по объективным и субъективным характеристикам и показал, что степень эстетики математической задачи в основном обуславливается наличием в них объективными признаками научного прекрасного, а эстетика обучения математической задачи – проявлением субъективных признаков научного прекрасного. (Всю информацию об объективных и субъективных признаках математического прекрасного можно найти в [6, с. 397–410; 4].

Из сказанного следует, что эстетика математики существенно способствует повышению эффективности обучения. Однако данная эстетика проявляется по-разному на гуманитарных и математических потоках естественных наук старшей

школы. Сказанное продемонстрируем двумя примерами.

*Задача 1. Для поступления на работу Анна успела подготовиться лишь к 20-и вопросам из 25-и, предоставленных организацией. Условие для поступления на работу следующее: нужно ответить на все 3 вопроса билета. Каковы шансы Анны для поступления на работу?*

Содержание задачи выражает ее практичность и полезность (практичность и полезность являются признаками научного прекрасного [4]). Задачей ученика, будущего студента, а также того, кто ищет работу, является сдача экзамена, потому оценка своих шансов в данных условиях является для них полезным знанием и умением.

Представим 2 способа решения задачи:

а) задачу решаем с применением логических связей. Объединение тем, не имеющих на первый взгляд ничего общего – элементы логики и элементы теории вероятности, говорит о проявлении единства разнообразий научного прекрасного или о первом критерии Хатчесона [6]. Решение задачи с применением логических связей имеет следующий вид: Анна поступит на работу, если ответит и на первый вопрос, и на второй вопрос (с тем условием, что уже ответила на первый вопрос), и на третий вопрос (с тем условием, что уже ответила на первые два вопроса) билета.

Анна поступит на работу, если ответит на				
1-й вопрос		2-й вопрос		3-й вопрос
$P = \frac{20}{25}$	и	$P = \frac{19}{24}$	и	$P = \frac{18}{23}$

Логическая связь «и» предполагает произведение, потому вероятность, которая нас интересует будет равна  $\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \approx 0.49$ .

Применение логической связки «и» придает дополнительное свойство (свойство – это объективный признак научного прекрасного) расширенной формулировке условия приема на работу, описанного в задаче, благодаря чему лучше представляется то, что от нас требуется, на основе чего, проведя необходимые расчеты, получаем показатель приема на работу.

б) задачу решаем с применением сочетаний. В результате, решение задачи принимает следующий вид:  $P = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} \approx 0.49$ , где

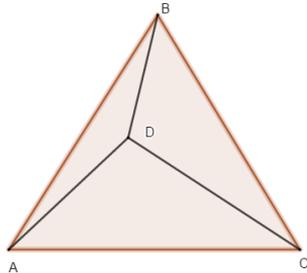
$C_{20}^3$  – количество способствующих сочетаний, а  $C_{25}^3$  – количество всех сочетаний.

Данное решение задачи отличается краткостью, а также проявлением признаков четкости и оптимальности научного прекрасного. Достаточно понять смысл сочетаний и знать соответствующую формулу, чтоб суметь быстро оценить шанс в соответствующей ситуации.

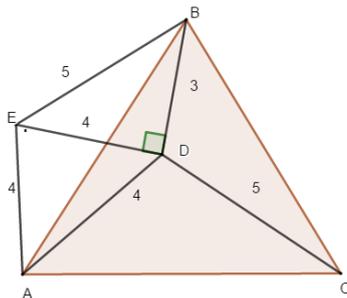
Рассматривая процесс обучения задаче, отметим, что интересно выяснять, как считают ученики, велики или малы шансы Анны для поступления на работу? Опыт показывает, что преобладает следующее мнение: если знать 80 процентов вопросов, то шансы велики. Однако, после решения задачи становится ясно, что вероятность поступления на работу меньше половины. Результат, несомненно, для большей части учеников становится непредсказуемым и неожиданным, что сопровождается эмоциями, выражающими удивление. Отметим, что неожиданность и непредсказуемость – субъективные признаки научного прекрас-

ного, и, значит, здесь проявляется эстетика решения задачи.

*Задача 2.* Во внутренней области равностороннего треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  так, что расстояния от вершин треугольника соответственно равны 3, 4 и 5. Найдите сторону треугольника.



Решение задачи отличается сложностью, и при поиске путей решения от учеников потребуются большие усилия, упорство и целеустремленность. Отметим, что применение усилий для преодоления трудных и сложных препятствий относится к субъективным признакам научного прекрасного. Однако решение задачи становится намного проще, когда треугольник  $ADC$  вращаем на  $60^\circ$  по отношению к точке  $A$  (рис. 2).



В результате имеем:  $A \rightarrow A$ ,  $C \rightarrow B$ ,  $D \rightarrow E$ . Нетрудно заметить, что  $\triangle ADC = \triangle AEB$ , причем  $\triangle AEB$  – равносторонний треугольник, а  $\triangle EDB$  – прямоугольный треугольник, так

как числа 3, 4 и 5 являются пифагоровыми числами. В  $\triangle ADB$   $\angle ADB = 150^\circ$ , применив теорему косинусов, найдем  $AB$ . Процесс решения задачи сопровождается проявлением признаков научного прекрасного – четкость, оптимальность, приведение сложного к простому. неожиданность и непредсказуемость.

Вышеописанные две задачи, которые различаются характером, степенью сложности и выделяются характерной им эстетикой, преподавались и на гуманитарном, и на естественноматематическом потоках 11-го класса старшей школы. Далее на обоих потоках выяснили степень заинтересованности учеников, как в содержании каждой задачи, так и в способах их решения.

При разработке результатов воспользовались формулой определения показателя заинтересованности  $Z$ , предложенным В.С. Черепановым:

$$Z = \frac{m_1 + 2m_2 + \dots + km_k}{km}$$

где  $m$  – количество участников эксперимента, а  $k$  – число ступеней шкалы уровней заинтересованности [7].

В случае нашего эксперимента данная формула имеет следующий вид:

$$Z = \frac{m_1 + 2m_2 + 3m_3}{3m}$$

где  $m_1 + 2m_2 + 3m_3 \leq m$ ,  $m$  – количество участников эксперимента,  $m_1$  – те участники, которым преподаваемая задача/решение неинтересно,  $m_2$  – которым интересно,  $m_3$  – которым очень интересно. Далее представлены полученные результаты.

Таблица 1

	Первая задача	
	Гуманитарный поток	Математический поток естественных наук
Содержание задачи	0,87	0,85
Первый способ решения задачи	0,75	0,70
Второй способ решения задачи	0,57	0,83
	Вторая задача	
	Гуманитарный поток	Математический поток естественных наук
Содержание задачи	не интересно	0,64
Способ решения задачи	не интересен	0,75

Результаты (см. табл. 1) показывают, что содержание первой задачи очень интересно ученикам обоих потоков, именно по той причине, что в формулировке задачи описана практическая, повседневная ситуация. На месте героини задачи окажутся почти все ученики, независимо от выбора профессии, и в данном случае

результат задачи – оценка шанса Анны для поступления на работу, является источником мотивации для учеников. В то же время, из показателей заинтересованности в содержании второй задачи становится понятно, что оно интересно ученикам математического потока естественных наук, однако неинтересно ученикам гуманитар-

ного потока. Думаем, что главная причина заключается в «черствой» математической формулировке. При преподавании задачи на гуманитарном потоке, когда представляли ее содержание, ученики часто выражали следующие мысли: «нам не надо глубоко изучать математику», «что нам даст решение данной задачи?» и так далее. Картина будет другой, если в преподаваемых математических задачах по возможности больше будут проявляться признаки научного прекрасного – применяемости и полезности.

Вот если геометрическую задачу сформулируем так, чтобы математическая модель не изменилась, но в задаче бы описывалась практическая и интересная ситуация, то заинтересованность учеников в задаче относительно повысится.

Перейдя к анализу показателей заинтересованности в способах решения задач, замечаем, что первый способ решения стохастической задачи для учеников гуманитарного потока более интересен, чем второй. Причина в том, что из-за плохой математической подготовки понимание сочетаний, а также соответствующей формулы создает трудности. Высокий результат показателя заинтересованности в первом способе обусловлен в первую очередь признаком единства разнообразий. В целом, независимо от потока, для учеников неожиданно и удивительно увидеть связь между логикой и вероятностью. Кроме того, способ решения задачи с применением логической связки – более анализирующий и дает возможность ученику с небольшой математической подготовкой участвовать в процессе решения и понять его. А вот ученикам естественноматематического потока более интересен способ решения стохастической задачи с применением сочетаний, что обеспечивается благодаря признаку оптимальности научного прекрасного.

Процесс решения геометрической задачи неинтересен ученикам гуманитарного потока. Нахождение любого решения требует больших усилий, что выше их сил, а выучивание готового решения не дает им возможности увидеть эстетику решения задачи. В тоже время эстетика решения задачи – оптимальность решения, неожиданность выбора метода, усилия, которые упорно применяются для решения задачи, обеспечила большой интерес ученикам естественноматематического потока. Отметим, что на самом деле по поводу применения усилий существует два противоречивых подхода: согласно Г. Биркгофу мера применения усилий обратно пропорционально проявлению прекрасного, а согласно Г. Айзенку – она прямо пропорционально проявлению прекрасного. Как отмечает Г. Микаелян: «Если усвоение теоре-

тического материала или решение отдельной задачи выше сил ученика, то его усилия приводят всего лишь к зубрежке и отталкивают от математики, и здесь присутствует подход Г. Биркгофа [8]. А если усилия целенаправлены и приводят к пониманию материала [9], то действует подход Г. Айзенка. Более того, в последнем случае после двух-трех применений усилий ученики становятся более упорными и целеустремленными...» [6, стр. 39]: Таким образом, получается, что в данном случае на гуманитарном потоке действует подход Г. Биркгофа о проявлении прекрасного, а на естественноматематическом потоке – подход Г. Айзенка.

#### Список библиографических ссылок

1. Эстетика в математике очень важная вещь: Елена Кудрявцева поговорила с Анатолием Вершиком – одним из самых цитируемых российских ученых. Огонёк, 2017. №4. С. 28. URL: <https://www.kommersant.ru/doc/3200633>.
2. Вечтомов Е.М. Об эстетике математики. *Вестник Вятского государственного университета*, 2012. №1(4). С. 69–75. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ob-estetike-matematiki-1/viewer>.
3. Ерошенко В.А. Эстетическая ценность математического знания и преподавание математики. *Российский гуманитарный журнал*, 2016. Т. 5. №2. С. 108–121.
4. Микаелян Г.С. Эстетические основы математического образования: монография. Ереван-Черкассы, 2019. 220 с.
5. Якир М.С. Что такое красивая задача? *Математика в школе*, 1989. №6.
6. Микаелян Г.С. Прекрасное и образовательный потенциал математики. Ереван, 2015.
7. Черепанов В.С. Экспертные методы в педагогических исследованиях. М.: Педагогика, 1980. 150 с.
8. Биркгоф Г. Математика и психология. Пер. с англ. Г.Н. Поварова. М.: Советское радио, 1977. 96 с.
9. Волошинов А.В. О союзе эстетики и математики в истории культуры. *Обсерватория культуры*, 2006. № 6. С. 100–109.

#### References

1. Aesthetics in mathematics is a very important thing (2017): Elena Kudryavtseva talked with Anatoly Vershik, one of the most cited Russian scientists. *Twinkle*, 4: 28. Retrieved from <https://www.kommersant.ru/doc/3200633>.
2. Vechtomov, E.M. (2012) On the aesthetics of mathematics. *Bulletin of Vyatka State University*, 1(4): 69–75. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/ob-estetike-matematiki-1/viewer>.
3. Eroshenko, V.A. (2016) The aesthetic value of mathematical knowledge and the teaching of mathematics. *Russian humanitarian journal*, 5(2): 108–121.
4. Mikaelyan, G.S. (2019) Aesthetic foundations of mathematical education. Yerevan-Cherkasy. 220 p.
5. Yakir, M.S. (1989) What is a beautiful task? *Mathematics at school*, 6.
6. Mikaelyan, G.S. (2015) The excellent and educational potential of mathematics. Yerevan.
7. Cherepanov, V.S. (1980). Expert methods in pedagogical research. Moscow: Pedagogy. 150 p.
8. Birkhoff, G. (1977) Mathematics and Psychology. In G.N. Cooks (Transl. from English). Moscow: Soviet Radio. 96 p.
9. Voloshinov, A.V. (2006) On the union of aesthetics and mathematics in the history of culture. *Observatory of Culture*, 6: 100–109.

**KAZARYAN Nare,**

Applicant of Mathematics and its Teaching Methods Department,  
Khachatur Abovyan Armenian State Pedagogical University;

Teacher of mathematics, International Scientific and Educational Complex "Lyceum Shirakatsi", Republic of Armenia

**ABOUT THE AESTHETICS OF TEACHING THE MATHEMATICAL PROBLEM ON HUMANITARIAN FLOWS OF SENIOR SCHOOL**

**Summary.** *At present, both in many countries and in Armenia, high school education is carried out according to differentiated streaming programs. An important part of our study is the problem of increasing the effectiveness of teaching mathematics in the humanitarian stream. Pupils in this stream show a disinterest in teaching math. This is evidenced by the results of a survey among students of the humanitarian flow of high school and math teachers teaching in this flow. The reasons are varied: the unsatisfactory level of mathematical training of students in the humanitarian flow, the workload and complexity of the program material, the allotted time, the application background that is weakly expressed in the textbooks, the chosen teaching method, low motivation, and so on.*

*Thus, the picture is as follows: the process of learning mathematics in the humanitarian flow is inefficient. In our opinion, in the matter of increasing the interest of students in the humanitarian stream, as well as increasing the*

*effectiveness of teaching mathematics, we will have positive dynamics if we make the aesthetic potential of mathematics and mathematical education more obvious, and develop practical ways to increase the aesthetics of teaching mathematics. In the context of this article, we will consider the mathematical problem and the features of its training in the humanitarian flows of high school.*

**Keywords:** *math learning process; math problem; task functions; objective signs of scientific beauty; subjective signs of scientific beauty; old school; humanitarian flow*

*Одержано редакцією 24.03.2020  
Прийнято до публікації 15.04.2020*