УДК 372.851

МИКАЕЛЯН Гамлет Суренович,
доктор педагогических наук, кандидат физмат наук, профессор, зав. кафедрой математики и методики ее преподавания,
Армянский государственный педагогический университет имени Х. Абовяна, Республика Армения
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

ОБРАЗУЮЩИЕ ПРИЗНАКИ НАУЧНОЙ ЭСТЕТИКИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ПОРЯДОК

Научные или математические признаки прекрасного, предложенные Ф. Хатчесоном и его последователями, являясь одним из основных средств выявления эстетического потенциала математики, имеют широкое применение и в математическом образовании. С этих позиций целесообразно произвести некоторую классификацию предложенных признаков. Некоторая часть этих признаков относится к объектам той или иной области, либо нескольких областей науки – это свойства данных объектов. Такие признаки мы называем объективными признаками научной эстетики. Объективные признаки научной эстетики, в свою очередь, могут быть разделены на части – образующие, объединяющие и логические. В работе [5] *мы представили логические признаки математического прекрасного. Образующие элементы природы - порядок, симметрия, сравнение, гармония, ритм, оптимальность, стабильность и т.д., которые изучаются также в математике - составляют другую часть объективных признаков научной эстетики. В данной работе мы рассмотрим проявления одного из важнейшего образующего признака научной эстетики - признака порядка в математике и в процессе ее преподавания.*

Ключевые слова: *обучение математике; признаки научного прекрасного; порядок; единство многообразий; неожиданность.*

Порядок во все времена считался основным принципом формирования природы, он противопоставлялся хаосу и рассматривался в качестве источника красоты. В античные времена порядок в первую очередь касался Вселенной. «Вероятно, первым, кто заговорил о космическом/вселенском порядке, был Пифагор, причем, пифагорейцы подтверждением данного порядка считают числа» [1]. Платон использовал идею порядка в процессах формирования всех областей эстетической, социальной, государственной жизни, человеческого тела, души. Концепции порядка большое место уделяет Аристотель. Он приписывает порядок в первую очередь к числам и связывает его с эстетикой: «Самые главные виды эстетики – это порядок, симметрия и определенность, которые больше всего выказываются в математическом порядке». «Порядок освобождает мысль», – говорит Рене Декарт, а Ле Корбюзье добавляет: «Насколько идеален порядок, настолько спокойно и уверенно чувствует себя человек».

И естественна колоссальная роль порядка и его эстетики в математике, который выступает также языком золотой книги природы, способом выражения ее закономерностей. По Норберту Виннеру, наивысшим призванием математики является нахождение порядка в окружающем нас хаосе. И не только математика, но и наука в целом имеет назначение признавать реальность, искать и утверждать порядок в хаосе мира. Однако, в отличие от других наук, порядок в математике выступает не только в качестве исследовательского инструмента, но также является одним из основных принципов формирования.

В качестве принципа формирования порядок в той или иной мере выступает в самых различных областях математики. Во-первых, в самом обобщенном виде порядок определяется в произвольном множестве, что ставит начало одного из основополагающих идей современной математики – теории упорядоченных множеств. Затем, на основе порядка создается одно из интереснейших разделов современной алгебры – теория структур. На основе единства порядка и алгебраических операций возникает теория упорядоченных алгебраических систем (теория упорядоченных групп, колец и т.д) – еще один интересный раздел современной алгебры. При помощи порядка определяется одно из важнейших понятий математического анализа – последовательности, – которая также лежит в основе математической индукции, одного из базовых математических методов выявления истины. Отметим еще, что в математике порядок находит самое простое и важное свое проявление в идее упорядоченных пар, а последняя лежит в основе таких фундаментальных понятий, как эквивалентность и функция.

Конечно, вышеотмеченные, а также другие связанные с порядком математические теории обладают прикладным характером, и, следовательно, имеют цель исследовать природу. Однако с этой точки зрения незаменимую роль играет порядок, выступающий в виде равенства, неравенства и строгого неравенства. Сперва следует отметить, что в большинстве своем математика представляет собой науку о различных равенствах, неравенствах и их доказательствах. С этой точки зрения порядок является математическим исследовательским методом: он выявляет не только взаимоотношения между математическими объектами, но и закономерности природы. Наконец, равенства и неравенства являются важнейшими способами выявления истины – если научная закономерность представляется в виде равенства и неравенства, то оно считается несомненной истиной.

Смежные, либо обусловленные порядком разделы математики существенно не отличаются от других разделов своей эстетичностью. Лишь следует отметить, что включение отношения порядка придает исследуемому математическому материалу дополнительные эстетические оттенки. А равенства и неравенства, процессы их раскрытия и доказательства всегда сопровождаются непредсказуемостью, ясностью, точностью, логической строгостью и другими признаками эстетики математики.

Эстетическая привлекательность математических объектов обусловлена порядком в исследованиях Г. Биркгофа, Г. Айзенка и Г.И. Саранцева и других. Г. Биркгоф в своей формуле $M = O/C$ и Г. Айзенк в своей формуле $M = O \cdot C$, хоть и радикально различным образом подходят к приложенным усилиям для восприятия вопроса оценки эстетичности математического объекта (С), однако, оба исследователя обуславливают эстетичность объекта его порядком (О).

В школьном курсе математики порядок также играет ключевую роль и является важным источником эстетической привлекательности соответствующих построений. Здесь порядок является одним из основных принципов формирования учебного материала. Использование дидактического принципа последовательности в изложении материала, упорядочивание прикладного фона курса (адаптация с математическим материалом), характеристика математических и прикладных объектов посредством отношения порядка - эти и другие подобные процессы демонстрируют ту уникальную роль, которую играет порядок в школьном курсе математики и в процессе ее обучения. В то же время, реализация функций порядка в курсе математики и процессе ее обучения сопровождается многими объективными и субъективными признаками математического прекрасного, ее внутренними и внешними проявлениями [4].

На протяжении многолетнего процесса обучения с самых первых шагов ученик имеет возможность заметить, что «математика вносит порядок в окружающий нас хаос». Действительно, понятия «право» и «лево», «вверх» и «вниз», «большой» и «маленький» уже являются прекрасными примерами выражения порядка и его эстетического признака, с которыми ученик знакомится еще в первом классе. А использование натуральных чисел? Здесь, наряду с подсчетом, выражается функция нумерации натуральных чисел, которая отличается полезностью, применимостью и другими признаками математического прекрасного. Впоследствии, идея упорядочивания натуральных чисел распространяется на целые, рациональных и действительные числа, используется для введения понятия числового прямого, в упорядочивании именованных чисел, и с помощью последнего прокладывает путь к различным приложениям математики. Все эти процессы сопровождаются полноценными проявлениями эстетики, которые выражаются посредством эстетических признаков единства многообразий и всеобщности.

В школьном курсе математики, наряду с отношениями равенства и неравенства, порядок выступает в качестве упорядоченности учебного материала, взаимоотношения понятий в рамках отдельных материалов, реализации последовательных доказательств и других формах. Так, например, когда мы совмещенно, то есть на уровне одного и того же множества, изучаем различные действия и взаимоотношения, то для утверждения порядка необходимо наличие определенного «согласия» между данными действиями и взаимоотношениями. Порядок требует, чтобы, к примеру, при совместном рассмотрении операций сложения и умножения натуральных чисел, между ними было вышеотмеченное «согласие», что выражается распределительным законом. И данный подход – подобное утверждение порядка – является фундаментальным подходом для всех математических структур. Введение таким способом порядка придает дополнительную эстетическую привлекательность тому, что посредством них устанавливаются также соответствующие порядки и для других операций. Например, исходя из того, что действия сложения и умножения целых чисел согласованы распределительным законом, следует, что действия вычитания и умножения также связаны с распределительным законом.

На числовые множества устанавливается также «согласие» между операциями сложения и умножения и понятиями больше/меньше следующим образом: для произвольных целых чисел a, b, c: если $a < b$, то $a + c < b + c$, и если также $0 < c$, то $ac < bc$. Таким же образом согласованы между собой порядок и операции сложения и умножения на множествах рациональных и действительных чисел. Отмеченный процесс упорядочения можно продолжить также для комплексных числах, например, следующим образом:

$$a + bi < c + di \Leftrightarrow a < c \text{ или } a = c \text{ и } b < d,\ a,\ b,\ c,\ d \in R.$$

Упорядочение комплексных чисел можно произвести по модулям и аргументам или многими другими способами. Однако самое интересное заключается в том, что, как бы мы не определяли порядок, вместе с действиями сложения и умножения комплексных чисел, вышеотмеченная связь не может быть осуществлена.

Действительно, предположим, что это было возможно, т. е. если $a < b$, то $a + c < b + c$, и если также $0 < c$, то $ac < bc$, где a, b, c – комплексные числа. Сравним комплексные числа i и 0. Возможны два варианта $0 < i$ либо $i < 0$. В первом случае получим $0 \cdot i < i \cdot i$ или $0 < -1$. При добавлении 1 к двум частям последнего неравенства получим $1 < 0$, а при умножении двух частей на число больше 0, то есть –1, получим $-1 < 0$. Получилось противоречие с неравенством $0 < -1$.

Нетрудно убедиться также и в том, что к противоречию сводится также случай $i < 0$. Таким образом, как бы мы не вводили отношение «меньше» во множестве комплексных чисел, невозможно согласовать его с операциями сложения и умножения. Поэтому во множество комплексных чисел и не вводится отношение порядка.

Эстетическая привлекательность приведенного рассмотрения обусловлена также признаками неожиданности и непредсказуемости научной эстетики. В то же время оно показывает, что эстетический признак единства многообразий не может быть неограниченным, оно может быть распространено только на определенной группе предметов.

Порядок, эстетический подход позволяют также произвести правильные подходы и решить самые различные методические задачи. Рассмотрим, например, такую важную проблему методики преподавания математики, как проектирование курса алгебры в средней школе, в частности, решение вопроса о месте расположения материала, касающегося неравенства. В случае с последним у специалистов нет единого подхода. Часть специалистов считает, что необходимо материал изложить единообразно, в рамках одной темы. Другая часть, наоборот, считает правильным смешение данной темы с общим алгебраическим материалом. А решение должно быть найдено исходя из приоритетов структуры алгебраического материала, следуя опыту построения теорий в математической логике [2]. Последняя ставит в основу теории три множества символов: множества предметных и предикатных символов и символов операций, с помощью которых сначала определяются термы теории, а затем и формулы; некоторые из формул выделяются в качестве аксиом, из которых посредством правил вывода получают теоремы теории.

Такой общий подход может служить продуктивным ориентиром для построения школьного курса математики, для размещения и упорядочения в нем материала. Не вдаваясь в подробности решения вопроса, отметим, что для курса алгебры вопрос выбора множеств символов решается в рамках алфавита алгебры, где наряду с числами, греческим и латинским алфавитом, величинами, включается также прикладной фон математики. В качестве символов операций выступают алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления, из которых производятся операции возведения в степень, нахождения корня и так далее. Таким образом, эти операции должны быть стержнями, вокруг которых строится остальной материал.

В качестве основных формул рассматриваются равенство, порядок (или виды неравенства), принадлежность элемента к множеству и т.д. Круг рассмотрения каждой из операций строится, исходя из взаимоотношений рассматриваемых формул и операций. «Алгебра–7», например, которую я назвал «Азбукой алгебры», состоит из пяти глав. После первой главы, которая озаглавлена как «Алфавит алгебры» и посвящена символам алгебры, следует вторая глава, посвященная сложению, в которую включены сложение равенств, неравенств, а также приложения сложения. Таким же образом построены и иные главы, которые посвящены другим основным операциям алгебры: вычитанию, умножению и делению [3]. Такое построение материала выделяется своей отличительной эстетической привлекательностью, так как отражает естественный ход вещей и позволяет помимо порядка включить в процесс обучения также точность, простоту, единство многообразий и другие признаки математического прекрасного.

Список использованной литературы

1. Лосев А.Ф. История античной эстетики. Итоги тысячелетнего развития. – М. : Правда, 1992; 1994. – 569 с.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М. : Наука, 1976. – 320 с.
3. Микаелян Г.С. Алгебра–7. Учебник для общеобразовательной школы / Г.С. Микаелян. – Ереван : Эдит Принт, 1999; 2006. (на армянском языке).
4. Микаелян Г.С. Прекрасное и образовательный потенциал математики / Г.С. Микаелян. – Ереван : Эдит Принт, 2015. (на армянском языке).
5. Микаелян Г.С. Логические признаки научной эстетики в процессе обучения математике / Г.С. Микаелян // Вісник Черкаського університету. Серія педагогічні науки. – 2016. – № 18. – С. 85–93.

References

1. Losev, A.F. (1990). History of ancient aesthetics. The results of thousands of years of development. Moscow. (in Rus.).
2. Mendelson, E. (1976). *Introduction to mathematical logic*. Moscow. (in Rus.).
3. Mikaelian, H.S. (1999, 2006). *Algebra–7.* Textbook for secondary school. Yerevan: Edit Print. (in Arm.).
4. Mikaelian, H.S. (2015). *Beautiful and educational potential of mathematics*. Yerevan: Edit Print. (in Arm.).
5. Mikaelian, H.S. (2016). Logical signs scientific aesthetics in the process of teaching mathematics. *Bulletin of Cherkasy University. Series of pedagogical sciences, 18, 85–93.* (in Rus.).

MIKAELIAN Hamlet,
Doctor of Sciences (Pedagogy), Professor,
Head of Chair of Mathematics and Methods of its Teaching,
Armenian State Pedagogical University after Khachatour Abovian
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

GENERATOR SIGNS OF SCIENTIFIC AESTHETICS IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS: THE ORDER

Abstract. *In the article* [5] *we addressed the issue of the manifestations of signs of the scientific aesthetics, prostate and logical rigor in mathematics and in the process of the teaching mathematics. In this paper, we consider the scientific aesthetics of the sign of order in mathematics and in the process of teaching mathematics.*

The order at all times was considered as one of the basic principles of nature, it was opposed to chaos and was seen as a source of beauty. The role of the order and its aesthetics in mathematics is great, which serves as the language of the golden book of nature, a way of expressing its laws. By Norbert Winner, the highest vocation of mathematics is to find order in the chaos around us. And not only mathematics, but also science as a whole has a purpose to recognize reality and seek to assert order in the chaos of the world. However, unlike other sciences, the order in mathematics is not only a research tool, but is also one of the main principles of formation. As the principle of formation, the order appears in many different areas of mathematics. Firstly, the order is determined in an arbitrary set in generalized form that puts the beginning of one of the fundamental ideas of modern mathematics - the theory of ordered sets. Then, one of the most interesting areas of modern algebra - theory of structures is creating based on the order. Another interesting chapter of modern algebra, theory of ordered algebraic systems (the theory of ordered groups, rings, ...) arises on the basis of the unity of order and algebraic operations. One of the most important concepts of mathematical analysis - sequence is determined with the order, which also underlies the induction, one of the basic mathematical methods to ascertain the truth. The order as a criterion of mathematical aesthetic was the object of research by G. Birkhoff, H. Eysenck, G. I. Sarantsev and others.

In school mathematics teaching it also plays a key role and is an important source of aesthetic appeal of the respective constructions. Here the procedure is one of the main principles of formation of educational material. In the school course of mathematics, along with the relations of equality and inequality, the procedure acts as a ordering of the educational material, the relationship of concepts within the framework of the algebraic materials, implementation of consistent evidence and other forms. On the set of real numbers is also set "agreement" between the operations of addition and multiplication, and the inequalities that cannot be achieved for the field of complex numbers. The order, aesthetic approach also allows to make the right approach and solve a variety of methodological problems.

Key words: *teaching mathematics; signs of scientific beauty; order; unity of manifolds; surprise.*

Одержано редакцією 21.02.2017
Прийнято до публікації 28.02.2017