

УДК 372.851

**МИКАЕЛЯН Гамлет Суренович,**доктор педагогических наук, кандидат физмат наук,  
профессор, зав. кафедрой математики и методики ее  
преподавания,Армянский государственный педагогический  
университет имени Х. Абовяна, Республика Армения,  
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com**ОБРАЗУЮЩИЕ ПРИЗНАКИ НАУЧНОЙ ЭСТЕТИКИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ  
МАТЕМАТИКЕ: ГАРМОНИЯ**

*Научные или математические признаки прекрасного, предложенные Ф. Хатчесоном и его последователями, являясь одним из основных средств выявления эстетического потенциала математики, имеют широкое применение и в математическом образовании. С этих позиций целесообразно произвести некоторую классификацию предложенных признаков. Некоторая часть этих признаков относится к объектам той или иной области, либо нескольких областей науки – это свойства данных объектов. Такие признаки мы называем объективными признаками научной эстетики. Объективные признаки научной эстетики, в свою очередь, могут быть разделены на части – образующие, объединяющие и логические. Такие образующие элементы природы, как порядок, симметрия, сравнение, гармония, ритм, оптимальность, стабильность и т.д., которые изучаются также в математике, составляют часть объективных признаков научной эстетики. В предыдущей работе мы представили один из образующих признаков математического прекрасного – порядок, его проявления в процессе преподавания математике. В данной работе мы рассмотрим проявления другого важного образующего признака научной эстетики – признака гармонии в математике и в процессе ее преподавания.*

**Ключевые слова:** обучение математике; признаки научного прекрасного; гармония; прекрасное.

**ГАРМОНИЯ.** Гармония является одним из важнейших элементов эстетики и имеет тысячелетнюю историю. Философская и эстетическая мысль в разные времена обращалась к данному понятию и давала разнообразные интерпретации. В настоящее время не существует единого понимания данной концепции. Гармония представляется в виде согласованности частей целого, в соответствии с эстетическими законами [1]; культурное положение, направленное на мировую структуризацию с позиции внутреннего регулирования, на отдельные ее части, а также на человека и понимание его жизни [2]; категория, которая отражает естественный характер реальности развития, внутренней и внешней согласованности эстетического объекта, его содержание и целостность формы, а также соразмерность [3], симметрию отдельных частей объекта, слияние различных компонентов в одно органическое целое [4]; согласованность частей разъединенного целого, которая диктуется эстетическими законами [5]; соразмерность частей с целым и друг с другом [6].

Гармония проявляется повсюду: начиная с Солнечной системы и Вселенной, мельчайших частиц природы, человеческих генов, каждого отдельного человека и общественных единиц до общества в целом. Одним из замечательных примеров гармоничности природы является гармония между животным и растительным мирами, что проявляется в роли обоих миров в жизни друг друга: растения дышат углекислым газом и выдыхают кислород, животные дышат кислородом и выдыхают углекислый газ. Все научные открытия, законы и закономерности, так или иначе, одобрены гармонией, существующей в мировой структуре. Гармония материального мира утверждает закон о сохранении материи и ее трансформации, гармония движения – закон инерции, гармония живого и неживого мира – естественные науки, гармония человека и окружающего мира – психологию, физиологию, гармония человека и социума – социологию и другие общественные науки, гармония между Вселенной и человеческим разумом – философию, а гармония чувств – искусство.

**ГАРМОНИЯ И МАТЕМАТИКА.** Рассмотрение отношений между гармонией и математикой начинается еще с античного периода и прямо или косвенно отражалось на протяжении всей истории эстетики.

В античное время Пифагор и пифагорейцы в основу гармонии ставили число и числовые отношения. Без числового отношения невозможно объяснить как золотое сечение, так и гармонию музыки. С их, как и с платоновской, точки зрения, в деле формирования вселенской гармонии большую роль сыграли равносторонние многогранники, и эту гармонию можно выразить посредством числовых сравнений [7]. В восприятии гармонии большое место математике выделял Аристотель. Размер, величина, порядок, симметрия, с помощью которых Аристотель определяет гармонию, также имеют буквально математическое содержание. В эллинистическую эпоху также выделяли особую роль математики в формировании гармонии. В эстетическом подходе к гармонии стоики выделяли важность роли числовых сравнений в музыке. В этом плане Цицерон обращается ко вселенской музыке, рожденной в процессе движения небесных тел. А Марк Витрувий в основу своей эстетики ставит идею соразмерности, что по своей сути вытекает из гармонии, добавив к ней вычисляемые математические сравнения.

Средневековая эстетика также придает большое значение отношениям гармонии с математикой. Аврелий Августин большое значение в деле формирования гармонии и, в целом, эстетики придавал числу, в частности, на первый план он выдвигал математическое восприятие музыкальной гармонии [8]. Другой мыслитель раннего Средневековья Бозций свои математические подходы к искусству и, в частности, к гармонии сводил к числовой гармонии в музыке [9]. Вообще, сведение гармонии к количественным отношениям посредством математических сравнений – самая яркая тенденция средневекового восприятия гармонии, что особенно сильно выражалось в музыке (музыка в то время считались сферой математики). В позднем Средневековье, в особенности в готической архитектуре, математика имела широкое участие. Геометрические фигуры – равносторонний треугольник и четырехугольник – выступают в качестве эстетических формообразующих элементов архитектурных сооружений и создают уникальную выраженность гармонии. В то же время для Средневековья характерно было теологическое восприятие эстетики и гармонии, представление их как божественных творений, что, однако, было далеко от математических подходов.

В подходах искусствоведа эпохи Возрождения Леона Альберти число либо числовые сравнения, а также ограничения, производимые геометрическими фигурами, рассматриваются как компоненты архитектурной гармонии. В работах Луки Пачоли, да Винчи, Дюрера сравнение и, в частности, золотое сечение, как компонент гармонии, используются для идеального представления частей тела человека и получают соответствующее математическое выражение. Это послужило основой для создания перспективы и гармонии посредством нее, что способствовало развитию ренессансной живописи.

Лейбниц, следуя средневековой традиции, считает, что суть музыкальной гармонии природы содержится в природе числа, и все очарование музыки лежит в числовых отношениях, которые человек чувствует подсознательно. «Музыка для души – это арифметическое упражнение, при этом, душа не осознает, что она занята исчислениями самого себя». Он считает, что на основе математики появляются гармонии и других форм искусства, которые приносят удовольствие не только уху и глазу. «Математика – это поэзия гармонии», – заключает Лейбниц.

В последствии эстетическая мысль придает больше значение не количественному, а качественному составляющему гармонии, что изрядно уменьшает участие математики в данной области. Следует, однако, выделить Гегеля, который в своем обширном учении о гармонии представляет математическое понимание гармонии, сочетая его с понятиями каноничности и симметрии.

Связь гармонии и математики не ограничивается лишь искусством и эстетическими подходами. Определение Галилея «золотая книга природы написана на языке математики» является, вероятно, лучшей характеристикой гармонии математики с природой. Сегодня невозможно представить себе природу, естественные науки и исследования техники без математики. Причиной является наличие отмеченной гармонии. Именно эта гармония послужила для М.В. Волькенштейна основой для того чтобы сделать следующий вывод: каждая четкая и последовательная математическая формулировка научных достижений оставляет эстетическое впечатление. Гармония с природой дает возможность математике и

ее мощному аппарату быть вовлеченной не только в естественные и технические, но и социальные науки, а также другие области человеческой жизнедеятельности, делая ее одним из ключевых факторов социального прогресса.

Гармония также широко проявляется в математике, становясь одним из наиболее важных принципов эстетической привлекательности ее архитектурной структуры. Число, числовые сравнения, размер, величина, геометрические фигуры, симметрия, участвующие в создании гармонии, придают эстетическую привлекательность объектам и явлениям природы и искусства не только потому, что «золотая книга природы написана на языке математики», но и потому, что сама эта математическая книга написана красиво. Одним из основных принципов, лежащих в основе этой красоты, является гармония между математическими объектами. И гармония в математике отнюдь не сводится лишь к математической гармонии: к количественному выражению вещей и явлений или же к их сущностному проявлению. Все математические теоремы - это проявление внутренних связей между объектами и закономерностей, или же гармонии. И что удивительно, изначально обладая мотивами гармонии с природой, математика развивается, исходя из своих собственных законов и закономерностей, своими принципами гармонии, но таким образом созданная и генерируемая новая математика находит свое применение в исследовании природы, что, опять-таки, в гармонии с природой.

**ГАРМОНИЯ В КУРСЕ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ.** Гармония также является одной из основных принципов образования природы и математики. С одной стороны она выражается в беспрецедентной согласованности природы и математики: мысленные абстрактные объекты математики описывают объекты природы, явления и закономерности. С другой стороны, абстрактные ментальные образы переплетаются друг с другом на первый взгляд невидимыми нитями и их единство создает прекрасную архитектурную структуру, которая еще со времен древних греков имела заветное название «математика». Эта архитектурная структура, как единство внутренних частей и их объединение в целое, соответствует общему греческой восприятию гармонии. Единство внутренних математических конструкций или частей структуры, то есть внутреннее единство отдельных областей математики более чем очевидно. Эти части имеют тенденцию к объединению в единую конструкцию, которая отражается в их взаимопроникновении, в общих методах исследования, в единстве математического языка и других характеристиках.

Однако школьная математика не представляет собой указанную науку «Математика», и не является ее частью, либо сегментом. Вопрос взаимосвязи между математикой и ее школьным курсом вопрос отдельного рассмотрения. Здесь мы отметим лишь то, что школьный курс математики, учитывая общественно-образовательные цели, включает в себя отдельные разделы математики, а также содержит самые разнообразные материалы из областей ее применения: наука, техника, экономика, спорт и другие аспекты человеческой жизнедеятельности.

Основные математические материалы являются опорой математического курса. Первым признаком гармонии курса должно выступать внутреннее единство этих математических материалов, которое в математической методике характеризуется термином «внутридисциплинарная связь». Добавим, что это единство частей, представляя собой частичное выражение признака научной эстетики единства множеств, также способствует повышению общей привлекательности эстетической архитектуры курса. Этот общий принцип должен, прежде всего, использоваться в различных учебных дисциплинах математики. Лучшим способом становления такой гармонии является идея, созданная Р. Декартом, о системе координат. Она позволяет понятия алгебры и матанализа представить в виде геометрических фигур, и наоборот. Здесь точка становится парой чисел, прямая – уравнением первой степени с двумя неизвестными, окружность – особым видом квадратного уравнения с двумя неизвестными и т.д. С другой стороны производная функции обозначает скользкость поверхности ее графика: если производная положительная, то график возрастающий и т.д. Эта гармония, обнаруженная Р. Декартом, позволяет использовать возможности друг друга при реализации исследований в каждой из этих областей: алгебры, матанализа, геометрии. Геометрия, например, дает возможности визуализации, алгебра и матанализ – методы и приемы исследования и т.д.

Гармония должна присутствовать и в отдельных учебных дисциплинах математики. В геометрии это выражается в аксиоматической конструкции курса: в дедуктивных доказательствах теорем, их взаимосвязью, постепенностью и поочередностью развития материала. Все это позволяет представить геометрический курс как единство частей, которые наложены друг на друга, переплетенные горизонтальными и вертикальными связями единство, главный мотив архитектурности которого является гармония.

Курс алгебры средней школы также обладает идеальными возможностями выражения гармонии посредством аксиоматического, дедуктивного построения. Эти возможности были реализованы, например, в учебниках [10]. Здесь основами алгебраической архитектуры являются алгебраические операции, равенства, неравенства и некоторые другие отношения, соединяющими балками для которых выступают различные свойства, выражающие их взаимосвязь: равенство, неравенство, а также в другие формулы, которые выражают гармонию курса, а также отдельных его частей.

Следующим источником гармонии в школьном математическом курсе является прикладная область математики, или же прикладной фон. Этот компонент курса более характерен школьному предмету алгебры. Отметим, что дополнительную эстетическую привлекательность курсу придает единство на первый взгляд довольно далеких друг от друга теоретической и воображаемой, а также прикладной и видимой областей математики, и затем – прикладное значение этих воображаемых материалов. Установливающаяся эстетическая привлекательность этой гармонии подчеркивается наличием признаков единства, всеобщности и применительности научной эстетики.

Мы уже обсуждали существующую гармонию между закономерностями природы и математики, между естественными науками, изучающими данные закономерности. И курс математики должен воспользоваться этой гармонией, чтобы выражать ее в каждом материале. Такой подход позволит сделать более привлекательным формулировку материала абстрактной математики, чтобы увеличить ее мотивацию, интерес к ней. Следует признать, что принцип гармонии не всегда сохраняется и часто нарушается в рамках курсов и учебников математики внутри системы образования одной и той же страны. В работе [7], к примеру, мы отметили многочисленные нарушения такого рода в советских учебниках. Но они выражены более ярко в нынешних учебниках. Достаточно отметить, что учебники по геометрии естественно-математических потоков средних и старших школ РФ основываются на совершенно различных аксиоматических системах. Многочисленны нарушения принципа гармонии между курсами алгебры и геометрии, алгебры и математического анализа. Все это является следствием непрофессиональной системы отбора образовательных учебников.

**ГАРМОНИЯ УРОКА МАТЕМАТИКИ.** Вопрос гармонии урока школьной математики заслуживает отдельного обсуждения. Здесь на первый план выдвигается целый ряд вопросов, которые не имеют однозначного решения. Действительно, представляет несомненной истиной тот факт, что урок, представляющий собой процесс передачи учителем учебного материала и его усвоением и восприятием учеником, должен быть единым, гармоничным целым. Но как достичь такой гармонии, когда класс состоит из десятков детей с различными способностями, предпочтениями и интересами. И в сфере способностей, предпочтений и интересов большинства этих детей абстрактные идеи математики не умещаются, кажутся такими далекими от их только рожденных и неясных позывов и волнений. Как создать столь важный для гармонии мир между двумя учениками, которые очень далеки друг от друга своими способностями математического восприятия, когда оба, кажется, симпатизируют одну и ту же девочку. Принимает ли здесь учитель во внимание возможные проявления зависти, чувства неполноценности и других негативных явлений, которые воздействуют на психику ребенка? Или же понимает ли учитель, что каждый раз, когда он выставляет напоказ неспособность, беспомощность и другие негативные проявления отношения ученика к математике, он также передает отрицательный заряд психике ученика, снижает и придает бледный оттенок его образу жизни? Нужен ли, в таком случае, этот урок ученику?

А, может, будет возможно достичь гармонии посредством создания общей атмосферы доброжелательности? Терпимость, сострадание, взаимопомощь, благодарность – лучшие моральные качества для создания такой атмосферы, а ревность, злопамятность,

мстительность, насилие, нетерпимость, враждебность, угнетение, месть, принуждение будут только препятствовать образованию этой атмосферы. Эти моральные качества должны выражаться как учителем, так и учеником. Естественно, что их влияние увеличивается при их выражении учителем. Учитель должен знать, что источником негативного проявления могут также стать упрямство, мрачность, неприветливость, суровость, высокомерие [11].

Учитель должен также иметь необходимые профессиональные навыки, а также большое сердце. Последнее ему необходимо для того, чтобы суметь вместить безжизненный математический материал в такие, казалось бы, «мелочи», как жизнь, солнце, новое платье девочки, направленных на нее взглядов, ее собственных взглядов, направленных на тех или иных учеников, а также множеств других мелочей, которые интересуют, которыми полны сердца и души детей. А приучать математику нескольким избранным в классе, к чему сводится урок большинства наших учителей, не требует особого мастерства. Такие ученики могут выучить необходимую им математику и без учителя.

#### Список использованной литературы

1. Философский энциклопедический словарь. – М., 2010.
2. Мороз О.П. Прекрасна ли истина? / О.П. Мороз. – М. : Знание, 1989.
3. Философская энциклопедия / под ред. Ф. В. Константинова. – М., 1960–1970.
4. Большой энциклопедический словарь. – М., 2002.
5. Философская энциклопедия. – М., 2006.
6. Словарь иностранных слов русского языка. – М., 2014.
7. Микаелян Г.С. Эстетические основы обучения математике / Г.С. Микаелян. – Ереван : Эдит Принт, 2015. – (На армянском языке).
8. Аврелий А. О музыке, VI, XIX, 24.
9. Боеций. Наставление к арифметике. – М., 1990.
10. Микаелян Г.С. Алгебра 7, 8, 9. – Ереван : Эдит Принт, 2006, 2007, 2008. – (На армянском языке).
11. Микаелян Г.С. Моральные ценности и образовательный потенциал математики / Г.С. Микаелян. – Ереван : Эдит Принт, 2011. – (На армянском языке).
12. Лосев А.Ф. История античной эстетики. Итоги тысячелетнего развития. – М., 1969–1990.
13. Микаелян Г.С. Образующие признаки научной эстетики в процессе обучения математике: порядок / Г.С. Микаелян // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – 2017. – Вип. 6(2017). – с. 106–110.

#### References

1. *Philosophical Encyclopedic Dictionary* (2010). Moscow. (in Rus.).
2. Moroz, A.P. (1989). *Does truth is Beautiful?* Moscow: Knowledge. (in Rus.).
3. *Philosophical Encyclopedia* (1960–1970). In F.V. Konstantinov (Ed.). Moscow. (in Rus.).
4. *The Great Encyclopaedic Dictionary* (2002). Moscow. (in Rus.).
5. *Philosophical Encyclopedia* (2006). Moscow. (in Rus.).
6. *Dictionary of foreign words of the Russian language* (2014). Moscow. (in Rus.).
7. Mikaelyan, G.S. (2015). *Aesthetic foundations of teaching mathematics*. Yerevan: Edith Print. (In Arm.).
8. Aureliy, A. *About music*, VI, XIX, 24. (in Rus.).
9. Boethius. (1990). *Instruction to arithmetic*. Moscow. (in Rus.).
10. Mikaelyan G.S. (2006, 2007, 2008). *Algebra 7, 8, 9*. Yerevan: Edith Print. (In Arm.).
11. Mikaelyan, G.S. (2011). *Moral values and the educational potential of mathematics*. Yerevan: Edith Print. (In Arm.).
12. Losev A.F. (1969–1990). *The history of ancient aesthetics. Results of millennial development*. Moscow. (in Rus.).
13. Mikaelyan G.S. (2017). Forming the signs of scientific aesthetics in the process of teaching mathematics: order. *Bulletin of Cherkassky University. A series of "Teaching Science", 6 (2017), 106–110.* (in Rus.).

#### MIKAELIAN Hamlet,

Doctor of Sciences (Pedagogy), Professor,  
Head of Chair of Mathematics and its Teaching Methodics,  
Armenian State Pedagogical University after Khachatour Abovian,  
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

### GENERATING SIGNS OF SCIENTIFIC AESTHETICS IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS: HARMONY

**Abstract.** *Harmony is one of the most important elements of an aesthetics and has thousand-year history. Harmony is shown everywhere: since Solar system and the Universe, the smallest particles of the nature, human genes, each certain person and public units to society in general. Harmony is also widely shown in Mathematics, becoming one of its most important principles of aesthetic attractiveness of its*

*architectural structure. The number, numerical comparing, the size, the geometrical figures, symmetry participating in harmony creation give esthetic attractiveness to objects and natural phenomena and arts not only because "the gold book of the nature is written in mathematical language", but also because this mathematical book is written beautifully. One of the basic principles which are the cornerstone of this beauty is harmony between mathematical objects. And harmony in mathematician doesn't come down only to mathematical harmony at all: to the quantitative expression of things and phenomena or to their intrinsic manifestation. All mathematical theorems are a manifestation of internal communications between objects and regularities, or harmony. And what is surprising, initially having motives of harmony with the nature, the mathematics develops, proceeding from own laws and regularities, the principles of harmony, but in the new mathematics created and generated in the way it finds the application in a nature research that, besides, in harmony with the nature.*

*The first feature of harmony of course the internal unity of these mathematical materials which in a mathematical technique is characterized by the term "interdisciplinary communication" shall appear. We will add that this unity of parts, representing the partial trait phrasing of a scientific aesthetics of unity of sets, also promotes increasing the general attractiveness of aesthetic architecture.*

*School course of mathematics, considering the public and educational purposes, includes separate sections of mathematics (the general mathematics), and also contains the most various materials concerning the fields of its application: science, technique, economy, sport and other aspects of human activity. Harmony shall be shown not only in the organization of mathematical material, but also in presentation of application-oriented elements. Harmony shall be shown also in numerous and various interobject relations of mathematics with other learning disciplines, in the teacher's relations with pupils in educational process and out of it, etc.*

**Key words:** *teaching mathematics; Signs of scientific beauty; harmony; beautiful.*

*Одержано редакцією 09.04.2017  
Прийнято до публікації 14.04.2017*