УДК 378.147:51]:004

ІЩУК А. А.,
аспірант Інститут інформатики НПУ
імені М. П. Драгоманова

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ КОМП'ЮТЕРА

Розв'язування оптимізаційних задач з окремих розділів математичного програмування за практично прийнятий час можливе лише за допомогою комп'ютера з використанням відповідним чином дібраних чи спеціально розроблених програм. В статті розглянуто особливості розв'язування оптимізаційних задач. Зазначено, що використання інформаційно-комунікаційних технологій робить процес розв'язування оптимізаційних задач досить ефективним та позбавляє користувача від рутинних і трудомістких обчислень. Проаналізовано програмні засоби для розв'язування оптимізаційних задач.

Ключові слова: *теорія оптимізації; екстремальна задача; функція цілі; математична модель.*

Постановка проблеми. Задачі на знаходження екстремумів відіграють важливу роль в розвитку математики. Проблеми відшукання найкращого серед деякої множини варіантів люди розв'язують майже завжди. Такий найкращий варіант називають оптимальним (від. лат. *optimus* – найкращий). Пошук реального оптимального розв'язку є, як правило, складною задачею і відноситься до екстремальних задач, в яких необхідно знайти максимум чи мінімум певних функцій від аргументів, що задовольняють наперед задані обмеження. Обидва ці поняття – максимум (maximum) і мінімум (minimum) об'єднуються єдиним терміном «екстремум» (лат. extremum – крайній). Якщо на аргументи функції накладаються певні обмеження – умови, які повинні задовільняти аргументи, тоді екстремум (екстремальне значення функції) називають умовним. Якщо ж на аргументи функції не накладаються ніякі обмеження, тоді екстремум називають безумовним. Задачі на відшукання максимуму чи мінімуму певних функцій називають екстремальними задачами.

Напрям прикладної математики, предметом якого є теорія та методи розв'язування екстремальних задач за заданих додаткових умов називають математичним програмуванням. Такі задачі називають також оптимізаційними. Методи дослідження та розв'язування різних типів екстремальних задач складають основу *теорії оптимізації*.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значний внесок у розвиток теорії оптимізації зробили вчені: Л. В. Канторович [7], Т. Ч. Купманс, Дж. Данціг (задачі лінійного програмування), Г. Кун і А. Таккер [10] (задачі нелінійного програмування), Р. Белман [4], Л. С. Понтрягін, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелідзе, Є. Ф. Міщенко [8] (задачі динамічного програмування), Ю. М. Єрмольєв [6], Д. Б. Юдін [9] (задачі стохастичного програмування).

Мета статті – розглянути правила для знаходження оптимального розв'язку оптимізаційної задачі та навести приклади розв'язування деяких оптимізаційних задач за допомогою комп'ютера.

Виклад основного матеріалу. Для того, щоб знайти оптимальний розв'язок оптимізаційної задачі, потрібно дотримуватися певних правил, зокрема [1, с. 20-21]:

1. ***Здійснити постановку задачі***. Під час постановки будь-якої задачі її потрібно сформулювати в термінах певної предметної галузі, де задача виникла, в результаті чого повинно бути чітко визначено мету, яку потрібно досягти в результаті розв'язування задачі.

2. ***Побудувати відповідну математичну модель*** (систему математичних залежностей, за допомогою яких описують певні властивості, ознаки реальних об'єктів, процесів) на основі якісної постановки задачі – абстрактне відображення реального процесу у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо). В математичну модель включаються опис умов задачі (системи обмежень) та критерій ефективності розв’язку (цільова функція), за яким визначається, досягнуто чи ні поставлену мету в процесі розв’язування задачі.

3. ***Визначити тип отриманої математичної моделі.*** Після побудови математичної моделі потрібно визначити, до якого типу моделей вона відноситься, і обрати відповідно метод розв'язування задачі. В іншому випадку, коли задача не належить до жодного з відомих типів задач математичного програмування, потрібно: дослідити властивості цільової функції (на неперервність і диференційовність); визначити умови існування розв’язків задачі за заданих обмежень; встановити необхідні і достатні умови глобального або локального екстремуму; розробити аналітичні або чисельні методи відшукання розв’язку задачі.

4. ***Дібрати програмний засіб розв’язування задачі***. В умовах широкого використання інформаційних технологій для розв’язування задач математичного програмування як правило використовують комп’ютер з відповідним програмним забезпеченням. Якщо необхідного програмного засобу ще немає, тоді потрібно розробити алгоритм за обраним методом і описати однією з мов програмування відповідну програму для розв’язування такої задачі.

5. ***Провести обчислення (комп’ютерний експеримент), здійснити аналіз одержаних результатів.*** Під час побудови математичних моделей для задач математичного програмування потрібно дотримуватися таких вимог: наочність побудови; видимість основних властивостей і відношень; доступність моделі для дослідження або відтворення; простота дослідження, відтворення; збереження даних, що пов’язані з оригіналом, та одержання нових даних на основі досліджень.

Для розв’язування задач оптимізації широко використовують сучасні програмні засоби Excel, MatLab, Maple, MathCad, Mathematika, Sage, Maxima, Графоаналізатор 1.3.

Приклад 1. Потрібно завантажити літак вантажністю 30 т трьома типами речей, причому вага одиниці першого типу речей рівна 7 тонн, другого типу речей – 9 тонн, третього типу – 12 тонн. Вартість перевезення одиниці кожного типу речей рівна 3 тис. гр. од., 4 тис. гр. од., 5 тис. гр. од. відповідно. Очевидно, максимальна кількість речей кожного типу, яку можна помістити в літак відповідно дорівнює 4 одиниці, 3 одиниці, 2 одиниці. Яку кількість кожного типу речей потрібно завантажити, щоб вартість перевезення речей була максимальна [2, с. 160]?

Розв’язування. Нехай x_1, x_2, x_3 – кількість речей кожного типу відповідно.

Тоді цільова функція матиме вигляд:

$$Z(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max.$$

Обмеження на змінні x_1, x_2, x_3 матимуть вигляд:

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 12x_3 \le 30, \\ x_1 \le 4,\ x_2 \le 3,\ x_3 \le 2, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

Дану задачу можна розв’язати за допомогою програмного засобу MS Excel. Спочатку визначимо місце в електронній таблиці для виразів обмежень та цільової функції.

До клітинки B8 запишемо формулу для підрахунку значень цільової функції: =B3*D3+B4*D4+B5*D5 (рис. 1).

Вирази обмежень задачі записуються в клітинки B10:B13, куди вводяться вирази функцій, які відповідають виразам обмежень на змінні (рис. 1).

	A	B	C	D	E
1	Дані для літака вантажністю - 30 т				
2	Тип речей	Кількість речей, штук	Вага, тонн	Вартість, тис. гр. од.	Максимальна кількість
3	1	3	7	3	4
4	2	1	9	4	3
5	3	0	12	5	2
6					
7					
8	Цільова функція	=B3*D3+B4*D4+B5*D5			
9					
10	Обмеження	=C3*B3+C4*B4+C5*B5	<=	30	
11		=B3	<=	4	
12		=B4	<=	3	
13		=B5	<=	2	

Рис. 1.

В полі *«Оптимізувати цільову клітинку»* вкажемо адресу клітинки, де міститимуться результати обчислення значень цільової функції. В розглянутому випадку це клітина B8.

В полі *«До»*: вибираємо перемикач *«Максимум»*. В полі *«Змінюючи значення змінних в клітинках»* вказуємо діапазон клітин $B$3:$B$5- їх вмісти можуть змінюватися в процесі пошуку розв'язку (рис. 2).

Вводимо обмеження задачі в розділі *«У відповідності з обмеженнями»*. Для цього необхідно натиснути кнопку *«Додати»*, після чого відкривається допоміжне вікно *«Додавання обмеження»* (рис. 3).

Після натиснення кнопки *«Знайти розв'язок»* (див. рис. 2) з'являються результати обчислень.

Отже, щоб максимально завантажити літак, з дотриманням вказаних вимог, потрібно взяти 3 одиниці речей 1-го типу і 1 одиницю речей 2-го типу. Загальна вартість перевезення в такому разі становитиме 13 тис. гр. од. (рис. 4).

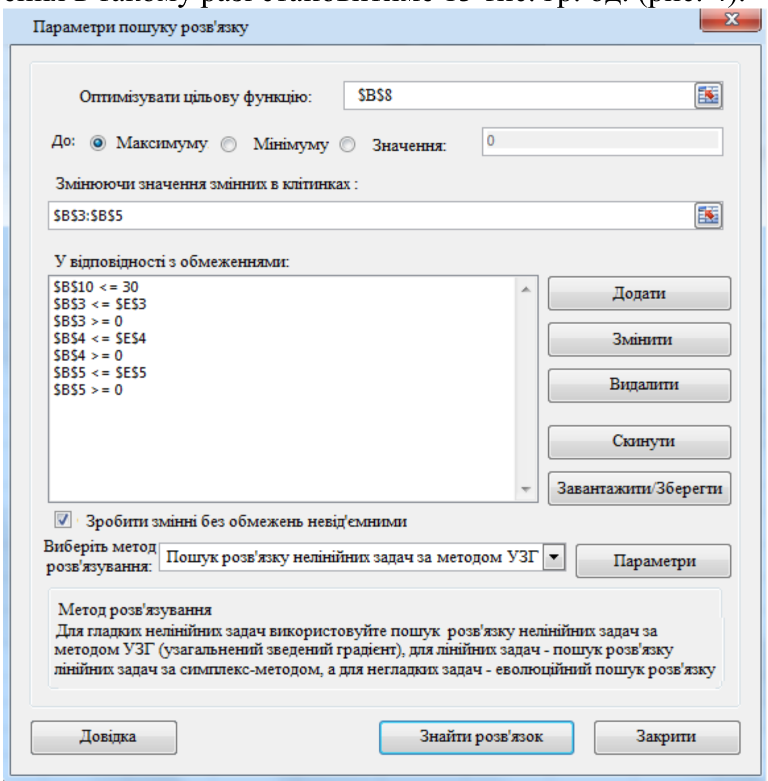

Рис. 2.

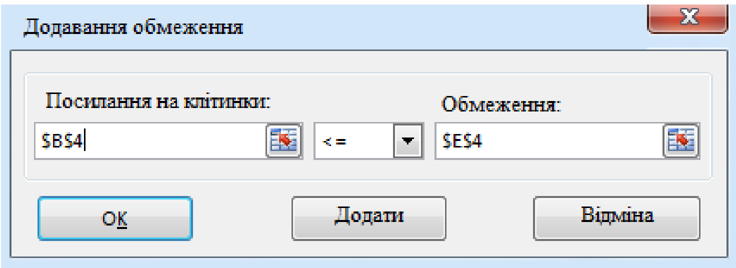

Рис. 3.

	A	B	C	D	E
1	Дані для літака вантажністю - 30 т				
2	Тип речей	Кількість речей, штук	Вага, тонн	Вартість, тис. гр. од.	Максимальна кількість
3	1	3	7	3	4
4	2	1	9	4	3
5	3	0	12	5	2
6					
7					
8	Цільова функція	13			
9					
10	Обмеження	30	<=	30	
11		3	<=	4	
12		1	<=	3	
13		0	<=	2	

Рис. 4.

Приклад 2. *Задача розрахунку траєкторії літака* [5, с. 339].

Літак у точці S_0 має швидкість V_0 та висоту H_0. Він повинен піднятися на висоту H_k і набути швидкість V_k. Потрібно мінімізувати витрати палива, якщо відомі витрати палива на збільшення швидкості від V_1 до V_2 на висоті H = const, та відомі витрати палива на збільшення висоти від H_1 до H_2 на швидкості v = const. Дані розрахунків показано на рисунку 5.

Всі прямокутники спочатку порожні. Між прямокутниками вказані цифри витрат палива на збільшення висоти (вертикальні лінії) та на збільшення швидкості (горизонтальні лінії). Початкова точка позначена як S_0, а кінцева – як S_k. Розрахунок починається з кінцевої точки S_k і переміщується у напрямку початкової точки S_0.

Алгоритм розв'язування задачі:

1. В кінцевому прямокутнику записуємо витрати палива «0».

2. В прямокутниках B_1 та B_2 записуємо витрати палива відповідно «11» та «8», що витрачаються для досягнення кінцевої точки S_k. Можлива оптимальна траєкторія позначається стрілками, а заборонені шляхи не помічаються стрілками.

3. В точки B_1, B_2 можна попасти з точок C_1, C_2, C_3. Із прямокутника C_2 на кінцеву точку можна йти шляхом через точку B_1 (з витратами палива 7 + 11 = 18) або через точку B_2 (з витратами палива 9 + 8 =17). У прямокутнику C_2 записуємо найменші витрати палива «17». Аналогічно знаходимо витрати палива, якщо літак рухатиметься з C_1 через точку B_1 (найменші витрати палива становитимуть «17») і з C_3 через точку B_2 (найменші витрати палива становитимуть «15»). Показуємо лише однією стрілкою можливу оптимальну траєкторію руху літака через точки C_3 та B_2. Стрілка на точку B_1 не показується, бо на цьому шляху витрати палива більші.

В такий спосіб вказуються витрати палива у всіх інших прямокутниках, і отримується ряд можливих траєкторій, позначених стрілками. Оптимальна кількість палива отримується у стартовому прямокутнику S_0 – цифра «37».

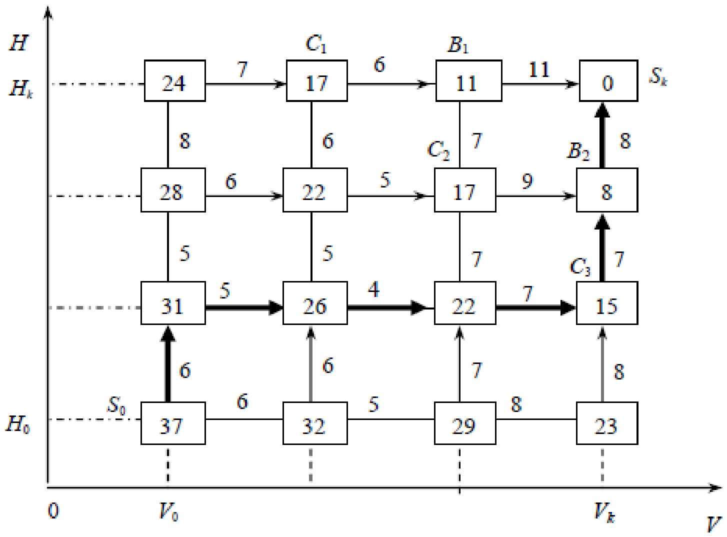

Рис. 5.

4. Оптимальний шлях отримується переміщенням з початкової точки S_0 відміченими шляхами у кінцеву точку S_k (оптимальний шлях показаний яскравішими стрілками).

Таким чином, отримали кількість витраченого палива та оптимальний шлях.

У даній задачі визначені всі умови переміщення для початкової та кінцевої точки. Тому процес отримання оптимальної траєкторії можна було б почати з початку – з точки S_0, позначаючи у прямокутниках мінімальну витрату палива за такого переміщення. Кінцевий результат (кількість витраченого палива та оптимальна траєкторія) в даному разі не змінюється.

Але розрахунки почато з кінця, бо це – найбільш поширений метод розрахунків в процесі розв'язування задач динамічного програмування.

Наведений розрахунок корисний тим, що аналізуючи його, можна наочно побачити всі виконані варіанти розрахунків, у тому числі і зайві.

Дану задачу розв'яжемо за допомогою програмного засобу Графоаналізатор 1.3.

Графоаналізатор – візуальне середовище для роботи з графами.

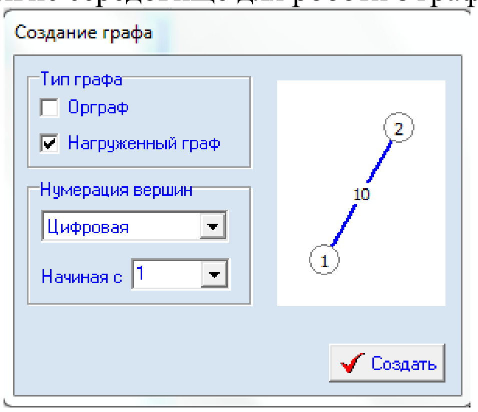

Рис. 6.

Використання Графоаналізатора не тільки надає можливість створювати і опрацьовувати графи, але візуально відображати результати виконання дій за алгоритмами. В програмному засобі реалізовано велику кількість алгоритмів для опрацювання графів. Графоаналізатор є безкоштовним і вільнопоширюваним програмним засобом, який можна завантажити з офіційного сайту програми http://grafoanalizator.unick-soft.ru.

Щоб створити граф, потрібно запустити програму на виконання. В результаті з'являється форма «Створення графа» (рис. 6), де слід обрати *«Навантажений граф»* (граф, у якого кожній дузі приписана її вага – деяке дійсне число). Обираємо числову номерацію вершин графа.

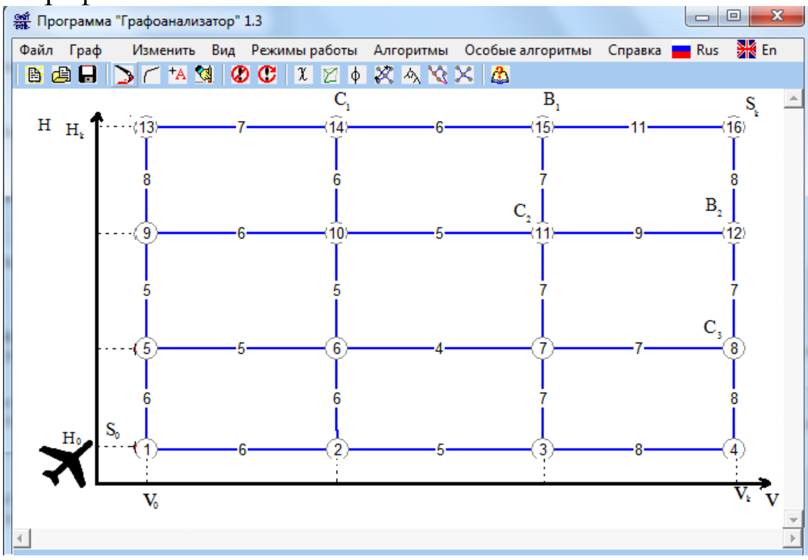

Рис. 7.

Після «натискання» кнопки *«Створити»*, з'являється нова головна форма програми (рис. 7), в якій за допомогою головного меню програми в робочому полі створюємо 16 вершин, з'єднаних між собою дугами, і вказуємо вагу кожної дуги. Даний граф можна створити на екрані графічно, або через матрицю зв'язності. Після створення графа потрібно обрати алгоритм, за допомогою якого буде розв'язуватися задача (рис. 8).

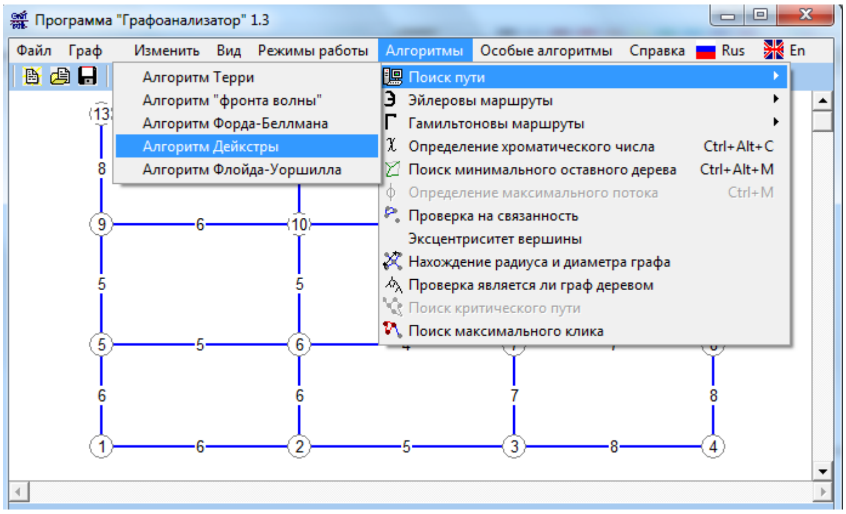

Рис. 8.

В розглядуваному випадку обрано алгоритм Дейкстри, де потрібно було вказати початкову вершину графа (звідки літак має стартувати) і кінцеву вершину графа (якої точки літак має досягти).

В результаті з'являється нова форма з графічно поданим розв'язком та результатами роботи за алгоритмом (рис. 9), де видно, що для того, щоб літак з точки S_0 дістався до точки S_k оптимальною траєкторією, потрібно 37 одиниць палива.

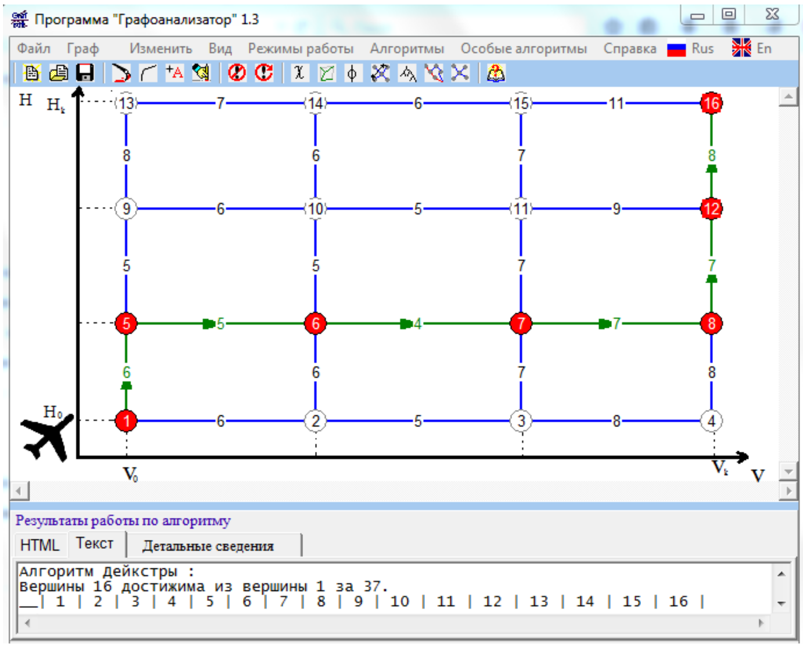

Рис. 9.

Висновок. Отже, для розв’язування задач оптимізації потрібні, перш за все, вміння аналізувати текст задачі, розкриваючи зв’язки між величинами; складати математичні моделі, описи явищ чи процесів, що розглядаються; правильно інтерпретувати отримані результати аналізу побудованої математичної моделі відповідно до специфіки явища чи процесу, що описані в умові даної задачі.

Список використаної літератури

1. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
2. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник / В. Я Кутковецький. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2003. – 260 с.
3. Іщук А.А. Використання комп’ютера в процесі навчання розв’язування деяких задач оптимізації // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2016. – № 18 (25). – 116-128 с.
4. Беллман Р. Динамическое программирование / Р Беллман. – М.: Изд-во Иностранная литература, 1960. – 400 с.
5. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций / Е. С. Вентцель. – М., Советское радио, 1964. – 390 с.
6. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования / Ю. М. Ермольев. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
7. Канторович Л. В. Математические методы в организации и планировании производства / Л. В. Канторович. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. – 68 с.
8. Понтрягин Л. С. Математичеcкая теория оптимальных процесов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянський, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф Мищенко. – 4-е изд. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
9. Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования / Д. Б. Юдин. – М.: Советское радио, 1979. – 392 с.
10. Kuhn H. W., Tucker A. W. Nonlinear Programming/ Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951. – p. 481–492.

Refernces

1. Zhaldak M. I. Basic theory and methods of optimization: Tutorial / M. I. Zhaldak , Yu. V. Tryus. – Cherkasy: Brama-Ukraina, 2005. – 608 p. (in Ukr.).
2. Kutkovetskyi V. YA. Operations Research: Tutorial / V. YA. Kutkovetskyi. – Mykolayiv: Publishing Mykolayiv State Humanitarian University of Petro Mohyla, 2003. – 260 p. (in Ukr.).
3. Ishchuk A.A. Use of computers in the learning process of solving some problems Optimization // Scientific Annals Nat. ped. Univof M.P. Drahomanov. Series №2. Computer-oriented learning systems: sciences. Labor / Redrada. – K.: NPU of M.P. Drahomanov , 2016. – № 18 (25). – 116-128 p. (in Ukr.).

4. Bellman R. Dynamic programming / R. Bellman. – M.: Edition Inostrannaja literatura, 1960. – 400 p. (in Russ.).
5. Ventcel E. S. Introduction to Operations Research / E. S. Ventcel'. – M., Sovetskoe radio, 1964. – 390 p. (in Russ.).
6. Ermoliev Ju. M. Methods of the Stochastic programming / Ju. M. Ermoliev . – M.: Nauka, 1976. – 240 p. (in Russ.).
7. Kantorovich L. V. Mathematical methods of organizing and planning production / L. V. Kantorovich . – L.: Publishing Leningradskogo universiteta, 1939. – 68 p. (in Russ.).
8. Pontrjagin L. S. The mathematical theory of optimal processes / L. S. Pontrjagin , V. G. Boltjanskij, R. V. Gamkrelidze, E F. Mishhenko. – 4nd ed. – M.: Nauka, 1983. – 392 p. (in Russ.).
9. Judin D. B. Problems and methods of stochastic programming / D. B. Judin . – M.: Sovetskoe radio, 1979. – 392 p. (in Russ.).
10. Kuhn H. W., Tucker A. W. Nonlinear Programming/ Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951. – p. 481–492.

ISHCHUK A.,
PhDstudent National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine

SOLVING SOME OPTIMIZATION PROBLEMS USING COMPUTER

Abstract. Introduction. *Solving optimization problems of individual sections of mathematical programming in practically acceptable time is only possible with appropriately selected or specially designed software via computer. Author describes the features of solving optimization problems. It is noted that using of information-communication technology makes the process of solving optimization problems sufficiently effective and eliminates the routine and time-consuming calculations. Author made analysis of the different software tools for solving optimization problems.*

Purpose. *Consider the rules for finding the optimal solution of the optimization problem and solve some examples of optimization problems using a computer.*

Methods. *The use of information-communication technology in solving some problems of optimization requires the user to the mathematical and informatics training, which leads to the choice of a variety of organizational forms and methods of teaching.*

Results. *The process of solving optimization problems using a computer with the use of appropriately selected or specially designed programs plays a leading role in the formation of the students' competence in the field of mathematical programming.*

Originality. *Theoretically grounded rules for finding the optimal solution of the optimization problem and some solutions are examples of optimization problems using a computer.*

Conclusion. *In solving optimization problems are needed, above all, the ability to analyze the text of the problem, revealing the connection between the values; make mathematical models to describe phenomena or processes that are considered; correctly interpret the results of the analysis of the mathematical model constructed in accordance with the specific phenomenon or process, described in terms of this problem.*

Key words: *optimization theory; optimization problem; objective function; mathematical model.*

Одержано редакцією 07.05.2016 р.
Прийнято до публікації 03.09.2016 р.