УДК 372.851

КУЗЬМИЧ В. І.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету

ПОНЯТТЯ КУТА ПРИ ВИВЧЕННІ ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ

Введено поняття кута для упорядкованої трійки точок довільного метричного простору, а також числової характеристики цього кута. Встановлено зв'язок введених понять з прямолінійними образами у довільному метричному просторі, що детально вивчались В.Ф. Каганом. Розглянуто приклад такої множини у метричному просторі інтегрованих за Ріманом на відрізку функцій.

Ключові слова: *метрика, функціонал, метричний простір, Евклідів простір, пряма лінія, кут.*

Постановка проблеми. Поняття метричного простору X ґрунтується на понятті віддалі між будь-якими двома його точками (елементами): якщо кожній парі точок x і y простору X поставлено у відповідність єдине дійсне число $\rho(x, y)$ – віддаль між ними, що задовольняє наступним трьом умовам:

а) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли точки x і y співпадають;

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – комутативність (симетричність) віддалі;

в) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для будь-якої точки z простору X (нерівність трикутника),

то функціонал $\rho(x, y)$ називають метрикою простору X, а сам простір – метричним, і позначають (X, ρ) [1, с. 30].

Велика кількість робіт присвячені «геометризації» метричного простору, тобто введенню у цих просторах понять аналогічних класичним основним геометричним поняттям: лінії, прямої лінії, кута, площини і таке інше.

Евклід [2, с. 11] давав означення лінії як «довжини без ширини», а прямої лінії – як лінії що «рівно розміщена по відношенню до точок на ній». Площина по Евкліду «*рівно розміщена по відношенню до прямих на ній*», а плоский кут є «*нахилення (нахил) одна до одної двох ліній, що зустрічаються у одній площині одна з одною, але не розміщених по одній прямій*», якщо при цьому лінії є прямими, то такий кут Евклід називає прямолінійним.

Давид Гільберт [3, с. 3,4] уникає характеристики кожного із цих понять окремо, а розглядає їх як об’єкти, властивості яких описуються через співвідношення між ними. Ці співвідношення наводяться у п’яти групах аксіом – аксіоми поєднання, аксіоми порядку, аксіоми конгруентності, аксіоми паралельності та аксіоми неперервності. Зокрема, по Гільберту «*Дві різні точки A і B завжди визначають пряму a*», «*Три точки A, B, C, що не лежать на одній і тій же прямій, завжди визначають площину α*». Відрізком Гільберт називає систему двох точок на прямій [3, с. 5], а променем що виходить з точки *O* – усі точки прямої що лежать по одну і ту ж сторону від точки *O* [3, с. 7]. Поняття кута Гільберт вводить у вигляді пояснення до групи аксіом конгруентності: «*Нехай α довільна площина, а h, k які-небудь два різні промені у площині α що виходять з точки O і належать різним прямим. Систему цих двох променів h, k ми називаємо кутом і позначаємо $\angle(h, k)$ або $\angle(k, h)$*» [3, с. 10].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У метричних просторах при означенні кута використовують поняття лінії, площини, а сам кут між лініями означають як границю певної множини плоских кутів [4, с. 35]. Це обґрунтовується необхідністю збереження «істинної сутності» кута [4, с. 36]. На наш погляд, недоліком цього означення є те, що не розрізняються поняття кута як об’єкта, і його числової характеристики (далі – характеристики).

Як видно із наведених прикладів, поняття кута вводиться у тісному зв’язку з поняттями прямої та площини. У цій роботі ми спробуємо ввести поняття кута та його характеристики у довільному метричному просторі (X,ρ) дискретним чином – без використання понять лінії, прямої лінії та площини, приблизно так, як це вказано у роботі [4, с. 36]. Такий підхід, на наш погляд, має певні переваги. Оскільки поняття метричного простору спирається на множину дійсних чисел, що уже побудована на основі системи відповідних аксіом, то не виникає потреби вводити додаткові аксіоми, а користуючись аксіомами множини дійсних чисел отримувати, як наслідки з них, різноманітні властивості множин точок метричного простору, що нагадують відповідні властивості прямих і площин Евклідової геометрії. Наприклад, перший постулат геометрії Евкліда прямо не вказує на те, що через дві точки можна провести єдину пряму [5, с. 44], хоча єдиність такої прямої мається на увазі: «Від будь-якої точки до будь-якої точки можна провести пряму лінію» [2, с. 14]. У системі аксіом Гільберта цей факт неявно сформульовано у аксіомі I_1: «Дві різні точки *A* і *B* завжди визначають пряму α» [3, с. 3]. Ми не будемо ставити собі за мету детально описати поняття прямої лінії, як це, мабуть найбільш вичерпно, зроблено В.Ф. Каганом [6, розділ XIX], а використаємо лише окремі її властивості («прямолінійно розміщені» точки, або «прямолінійний образ», як це зазначено у [7, с. 527]). Це, звичайно, звузить область застосування отриманих результатів, але на наш погляд, спростить і зробить більш наглядним інтерпретацію цих властивостей у конкретних метричних просторах.

Метричний підхід до вивчення окремих властивостей функцій, що є інваріантними по відношенню до системи координат, розглядався у роботах [8, 9].

Використання у подальших дослідженнях формули об’єму тетраедра через довжини його ребер, що виходять з однієї вершини та величини утворених ними кутів [10, с. 61] дасть можливість отримати умову, достатню для того щоб чотири різні точки метричного простору належали одній площині (були «плоско розміщені», або належали «плоскому образу»).

Мета даної статті – ввести у довільному метричному просторі поняття кута та його числової характеристики для довільної упорядкованої трійки точок цього простору, а також розглянути інтерпретацію цих понять у конкретному метричному просторі.

Виклад основного матеріалу. Інтуїтивно зрозуміло, що величина кута не повинна залежати від довжини його сторін, ця характеристика залежить лише від взаємного положення двох точок по відношенню до третьої – вершини кута (по Евкліду це «нахилення» або «нахил»). Тому для трьох точок *A, B, C* довільної множини *X* можна ввести поняття кута, вибравши одну з них за вершину цього кута. Однак, для порівняння кутів між собою потрібно ввести певну їх числову характеристику і при цьому не обійтись без віддалей між цими точками. У геометрії Евкліда таку залежність дає, наприклад, теорема косинусів: для трикутника ΔABC, з довжинами сторін *AB=m, BC=n, AC=p*, величина кута $\angle ABC=\beta$ зв’язана з довжинами сторін трикутника рівністю:

$$\cos\beta=\frac{m^2+n^2-p^2}{2mn}. \qquad (1)$$

Для довільної множини *X*, що містить не менше трьох різних точок, дамо наступне означення кута.

Означення 1. *Нехай a, b, c – різні точки множини X. Упорядковану трійку* (a,b,c)

цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці b множини X, і позначати $\angle(a,b,c)$. *Пари точок* (a,b) *і* (a,c), *при цьому, будемо називати сторонами кута.*

У цьому означенні не використовується поняття лінії і, отже, можна не вимагати повноти метричного простору, що є неминучим при її використанні, однак трійка точок має бути певним чином упорядкована – вершина кута вказується другою по порядку. У даній роботі будемо користуватись комутативним (симетричним) означенням кута, тобто кути $\angle(a,b,c)$ і $\angle(c,b,a)$ будемо вважати одним і тим же кутом.

Числову характеристику кута у метричному просторі (X,ρ), що містить не менше трьох точок, введемо як це зазначено у роботі [4, с. 36] – використовуючи рівність (1):

Означення 2. *Нехай a, b, c – точки метричного простору* (X,ρ). *Характеристикою кута* $\angle(a,b,c)$ *(або кутовою характеристикою) будемо називати дійсне число* $\varphi(a,b,c)$, *що знаходиться за формулою*

$$\varphi(a,b,c)=\frac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)}. \qquad (2)$$

Метричний простір (X,ρ), у якому введено поняття кута за означенням 1 і його характеристику за формулою (2), будемо називати метричним простором з кутовою характеристикою φ і позначати (X,ρ,φ).

З формули (2) та властивостей метрики ρ легко отримуються наступні властивості характеристики кута: $\varphi(a,b,c)=\varphi(c,b,a)$ і $-1\le\varphi(a,b,c)\le 1$.

Такі означення кута та його характеристики дають можливість по аналогії з Евклідовою геометрією ввести у метричному просторі поняття прямолінійності, перпендикулярності, паралельності множин точок простору, а також ввести аналог площини.

З рівності (2) при $\varphi(a,b,c)=1$ отримуємо дві рівності:

$$\rho(a,b)=\rho(b,c)+\rho(a,c), \qquad (3)$$

або

$$\rho(b,c)=\rho(a,b)+\rho(a,c). \qquad (4)$$

Рівність (3) означає, що точка *c* лежить між точками *a* і *b*. Рівність (4) означає, що точка *a* лежить між точками *b* і *c*. У обох випадках можна казати про прямолінійне розміщення точок *a*, *b*, *c* [6, с. 527], причому, у обох випадках можна назвати кут $\angle(a,b,c)$ нульовим, оскільки його вершина, точка *b*, лежить поза точками *a* і *c*.

Якщо у рівності (2) покласти $\varphi(a,b,c)=-1$, то отримуємо одну рівність:

$$\rho(a,c)=\rho(a,b)+\rho(b,c). \qquad (5)$$

Рівність (5) теж свідчить про прямолінійне розміщення точок *a*, *b*, *c*, однак у цьому випадку точка *b* лежить між точками *a* і *c*. Отже у цьому випадку кут $\angle(a,b,c)$ логічно назвати розгорнутим. Ці означення цілком узгоджуються з назвами відповідних кутів у геометрії Евкліда. Остаточно маємо:

Означення 3. *Будемо казати, що точки a, b, c простору* (X,ρ,φ) *прямолінійно розміщені, якщо* $\varphi(a,b,c)=\pm 1$.

Означення 4. *Будемо казати, що множина A точок простору* (X,ρ,φ) *розміщена прямолінійно, якщо будь-які три її точки прямолінійно розміщені.*

Означення 3 і 4, фактично, є перефразуванням відповідних означень роботи [6 с. 265] (або [7, с. 527]), однак використовують поняття кута і можуть бути узагальненими.

У різних метричних просторах поняття прямолінійності може мати свій смисл, що визначається способом введення метрики простору. Для ілюстрації означення 4 розглянемо, наприклад, множину функцій неперервних на відрізку $[a;b]$. Якщо для будь-яких функцій $x(t)$ і $y(t)$ цієї множини ввести віддаль між ними за формулою $\rho(x,y)=\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|dt$, то ця множина стає метричним простором, який позначають C_L. Розглянемо множину F функцій простору C_L таких, що для будь-яких двох з них $x(t)$ і $y(t)$ виконується нерівність $x(t)\geq y(t)$ (або $x(t)\leq y(t)$) для усіх значень $t\in[a;b]$. Таку множину функцій будемо називати монотонною.

Покажемо, що множина F розміщена прямолінійно у просторі C_L. Для цього розглянемо три довільні її елементи $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$. Нехай, наприклад, виконуються нерівності $x(t)\geq y(t)\geq z(t)$ для усіх значень $t\in[a;b]$. Знайдемо за формулою (2) кутову характеристику $\varphi(x,y,z)$. Для цього спочатку обчислимо вираз:

$$\rho^2(x,y)+\rho^2(y,z)-\rho^2(x,z)=$$

$$\left(\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|dt\right)^2+\left(\int\limits_a^b |y(t)-z(t)|dt\right)^2-\left(\int\limits_a^b |x(t)-z(t)|dt\right)^2=$$

$$\left(\int\limits_a^b (x(t)-y(t))dt\right)^2+\left(\int\limits_a^b (y(t)-z(t))dt\right)^2-\left(\int\limits_a^b (x(t)-z(t))dt\right)^2=$$

$$\left(\int\limits_a^b (x(t)-y(t))dt\right)^2+$$

$$\left(\int\limits_a^b (y(t)-z(t))dt-\int\limits_a^b (x(t)-z(t))dt\right)\left(\int\limits_a^b (y(t)-z(t)dt+\int\limits_a^b (x(t)-z(t))dt\right)=$$

$$\left(\int\limits_a^b (x(t)-y(t))dt\right)^2+\left(\int\limits_a^b (y(t)-x(t))dt\right)\left(\int\limits_a^b (y(t)-z(t)dt+\int\limits_a^b (x(t)-z(t))dt\right)=$$

$$\left(\int\limits_a^b (x(t)-y(t))dt\right)\left(\int\limits_a^b (x(t)-y(t))dt-\int\limits_a^b (x(t)-z(t))dt-\int\limits_a^b (y(t)-z(t))dt\right)=$$

$$\left(\int\limits_a^b (x(t)-y(t))dt\right)\left(2\int\limits_a^b (z(t)-y(t))dt\right).$$

Отже, за формулою (2) маємо:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{2\left(\int\limits_a^b (x(t)-y(t))dt\right)\left(\int\limits_a^b (z(t)-y(t))dt\right)}{2\left(\int\limits_a^b (x(t)-y(t))dt\right)\left(\int\limits_a^b (y(t)-z(t))dt\right)}=-1.$$

Із означення 3 слідує, що функції $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ розміщені прямолінійно, а із довільності вибору цих функцій у множині F за означенням 4 слідує її прямолінійність. Умовам цього прикладу задовольняє множина степеневих функцій $\{x^{\alpha}\}$ при $\alpha\geq 0$, на відрізку [0;1].

Таким чином, умову прямолінійності розміщення точок метричного простору можна розглядати як на умову монотонності їх розміщення по відношенню до метрики простору.

Рівність $\varphi(a,b,c) = \pm 1$, що присутня у означенні 3, можна замінити рівносильною рівністю: $1 - \varphi^2(a,b,c) = 0$. Останню рівність можна записати використовуючи визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) \\ \varphi(a,b,c) & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

У геометрії Евкліда внаслідок формули площі трикутника ΔABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$, рівність

$$\sin^2 \angle ABC = 1 - \cos^2 \angle ABC = \begin{vmatrix} 1 & \cos \angle ABC \\ \cos \angle ABC & 1 \end{vmatrix} = 0$$

означає рівність нулю площі трикутника *ABC*. Цю умову теж можна вибрати за означення прямолінійності розміщення точок *a*, *b*, *c*.

Означення 5. *Будемо казати, що точки a, b, c простору (X, ρ, φ) прямолінійно розміщені , якщо виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) \\ \varphi(a,b,c) & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (6)$$

Хоча означення 3 і компактніше у запису, однак воно простіше піддається узагальненню.

Висновки. Введення у розгляд такого поняття як кут для довільних трьох точок метричного простору дозволяє формалізувати вивчення окремих властивостей конкретних метричних просторів. Зокрема, стає можливим ввести поняття монотонності для окремих множин точок метричного простору (прямолінійне розміщення точок простору). Подальший розвиток цього поняття дасть можливість ввести поняття «плоского розміщення», або «плоского образу» точок метричного простору.

Список використаної літератури

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – М.: Наука, 1977. – 742 с.
2. Начала Евклида. Книги I-VI / [Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовский]. – М.-Л: Гостехиздат, 1948. – 447 с.
3. Давид Гильберт. Основания геометрии / Давид Гильберт – Петроград: Сеятель, 1923. – 152 с.
4. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей / А.Д. Александров – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 388 с.
5. Каган В.Ф. Основания геометрии. Часть 1 / В.Ф. Каган – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 492 с.
6. Каган В.Ф. Основания геометрии. Часть 2 / В.Ф. Каган – М.-Л.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
7. Каган В.Ф. Очерки по геометрии / В.Ф. Каган – М.: Издательство Московского университета, 1963. – 571 с.
8. Кузьмич В.І. Нестандартні задачі при вивченні властивостей функцій / В.І. Кузьмич // Інформаційні технології в освіті. – 2010. – Вип. 6. – С. 72-75.
9. Кузьмич В.І. Метричний підхід до вивчення окремих властивостей функцій / В.І. Кузьмич // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 5: Педагогічні науки – реалії та перспективи. – 2012. – Випуск 34. – С. 69-74.
10. Кузьмич В.І., Кузьмич Ю.В. Аналоги формули Юнгіуса об’єму тетраедра. / В.І. Кузьмич, Ю.В. Кузьмич // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – 2012. – № 36(249). –

С. 55-64.

References

1. Kantorovich L.V., Akilov H.P. (1977). *Function analysis.* M.: Nauka (in Russ.)
2. *Euclid's Elements. Books I-VI.* (1948). In D.D. Mordukhai-Boltovskii (Ed.). M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
3. David Hilbert (1923). *The foundations of geometry.* Petrohrad: Seiatel (in Russ.)
4. Aleksandrov A.D. (1948). *Intrinsic geometry of convex surfaces.* M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
5. Kahan V.F. (1949). *The foundations of geometry. Part 1.* M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
6. Kahan V.F. (1956). *The foundations of geometry. Part 2.* M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
7. Kahan V.F. (1963). *Geometry sketches.* M.: Moscow University (in Russ.)
8. Kuz'mich V.I. (2010). Custom tasks in the study of the properties of functions. *Informatsiini tehnolohii v osviti (Information technologies in education), 6,* 72-75 (in Ukr.)
9. Kuz'mich V.I. (2012). Metric approach to the study of certain properties of functions. *Naukovyi chasopys Natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni M.P. Drahomanova. Seriia 5: Pedahohichni nauky – realii ta perspektyvy (The scientific journal of the National pedagogical university named after M.P. Dragomanova. Series 5: Teaching science - realities and prospects), 34, 69*-74 (in Ukr.)
10. Kuz'mich V.I., Kuz'mich Yu.V. (2012). Analogs of formula Jungius volume tetrahedron. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky, 36(249),* 55-64 (in Ukr.)

KUZMICH V.,
Doctor of Philosophy (Physical and Mathematical Sciences), Associate Professor of Algebra, Geometry and Calculus Department, SIHE «Kherson State University»

THE CONCEPT OF ANGLE IN THE STUDY OF THE PROPERTIES OF A METRIC SPACE

Abstract. Introduction. *The structure of a metric space determines how the distance between any two assignment elements in this space. Previously, to determine the angle in an arbitrary metric space required condition for the completeness of this space. This was necessary due to the fact that the angle (straight-line) defined as a system of two rays with a common vertex, or as a limit of a sequence of straight angles under a continuous mapping of a plane domain. In any case, to determine the angle of the concept had to be a line, and this should be considered a complete metric space. If you define the angle in the metric space as a characteristic of the mutual arrangement of arbitrary three elements of this space, the space requirement of completeness can't claim.*

Purpose. *The purpose of work is to introduce the concept of angle to three arbitrary elements of a metric space. For numerical angle characteristics using an analog cosine trigonometric functions in Euclidean geometry. The aim is also to show concrete examples communicate the entered angle so with classical concepts straightness location points and monotony.*

Results. *The paper defines the angle as a combination of the three elements of arbitrary metric space, arranged in a certain way. The paper defines the angle as a combination of the three elements of arbitrary metric space, arranged in a certain way. Based on these definitions, we obtain conditions rectilinear arrangement of elements of a metric space. An example of the straight-line arrangement of the elements of a particular metric space.*

Originality. *For arbitrary three different elements of a set angle is determined as follows.*

Let a, b, c – the various points of the set X. An ordered (a,b,c) of these elements will be called the angle with vertex at the point b of the set X, and labeling $\angle(a,b,c)$. *Pairs of points* a,b *and* (a,c), *in doing so, will be called the sides of the angle.*

Numerical characteristic $\varphi(a,b,c)$ *angle* $\angle(a,b,c)$ *metric space* (X,ρ) *elements is by the formula:*

$$\varphi(a,b,c)=\frac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)}.$$

The condition of the rectilinear arrangement of points a, b, c of a metric space (X,ρ) *is equality:* $\varphi(a,b,c)=\pm1$.

In a metric space C_L, *continuous functions on the segment* $[a,b]$, *the distance between the*

functions $x(t)$ *and* $y(t)$ *defined as:* $\rho(x,y)=\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|dt$. *Many functions of this space such that the inequality* $x(t)\geq y(t)$ *holds for all values* $t\in[a;b]$, *that are located in a straight line. For example, many power functions* $\{x^{\alpha}\}$ *when* $\alpha\geq 0$, *on the segment* $[0;1]$.

Conclusion. *The concept of angle to three arbitrary elements of a metric space makes it possible to formalize the study of the individual properties of specific metric spaces.In particular, it is possible to be considered the property of the monotony of certain sets of points in space.*

Keywords: *metric, functional, metric space, Euclidean space, a straight line, the angle.*

Одержано редакцією 03.12.2016 р.
Прийнято до публікації 14.12.2016 р.