УДК 372.851

МИКАЕЛЯН Гамлет Суренович,
доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
зав кафедрой математики и методики ее преподавания,
Армянский государственный педагогический университет имени Х. Абовяна, Республика Армения
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

ОБЪЕДИНЯЮЩИЕ ПРИЗНАКИ НАУЧНОГО ПРЕКРАСНОГО В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

В работах [1–3] мы представили логическую и формирующую группы объективных признаков научного прекрасного в процессе обучения математике. Последнюю группу объективных признаков научного прекрасного составляют объединяющие признаки. Объединение вещей, явлений, людей, обществ и т. д. происходит из общности некоторых свойств и может имеет как положительное, так и отрицательное значение. Однако, в математике (и науке вообще) усматривается только положительную сторону данного явления и, следовательно, проявления объединения здесь считается красивым. В данной работе рассматриваются следующие объединяющие признаки научного прекрасного: единство разнообразий, всеобщность, применимость и математическая запись научной закономерности.

Ключевые слова: *обучение математике; эстетика математики; научное прекрасное.*

Единство многообразий и всеобщность. Единство в многообразии – первый критерий, предложенное Ф. Хатчесоном, как общий эстетический принцип для оценки прекрасного как в природе, так и в науке [4]. Ярким выражением единства в многообразий и всеобщности является понятие натурального числа: натуральное число n объединяет все множества с n элементами, и при выявлении какого-нибудь свойства числа n мы можем применять ее для любого множества с n элементами. Число n и вообще любую переменную x мы можем рассматривать как объединение разнообразий: n объединяет все числа. В то же время переменная x может принимать любое численное значение, что подчеркивает ее всеобщность.

Любое математическое (и не только математическое) понятие можно рассматривать как объединение всех элементов, входящих в объем этого понятия, и является прекрасным, так как сближает, позволяет вместе, в одном классе или в одно понятие объединить все разнообразие этих элементов/объектов. В то же время, любое верное утверждение об этом понятии будет верным и для любого элемента из объема этого понятия. Например, в понятии «треугольник» мы объединяем все многоугольники с тремя сторонами, и доказывая, что сумма внутренних углов треугольника равна 180 градусов, применяем этот факт относительно любого треугольника.

Как приведенная, так и любая другая математическая теорема имеет обобщенный характер: она справедлива для некоторого широкого класса математических объектов и применима как для подклассов этого класса, так и для его представителей. И применение теоремы для любого такого случая или получения из нее какого-нибудь следствия Хатчесон считает прекрасным, и это является вторым признаком прекрасного Хатчесона – признак всеобщности.

К примеру, когда мы находим, что площади треугольников с равными основаниями и высотами или треугольников с одинаковыми произведениями основ и высот равны, то используем теорему или формулу площади треугольника $S=ah/2$, и таким образом объединяем все многообразие указанных треугольников в один класс, что является выражением научного прекрасного.

Указанные признаки научного прекрасного, характеризующие Хатчесоном, широко проявляются в применениях математики в самих разнообразных отраслях науки и техники. Сами же эти применения математики выражают единство различных явлений науки и техники, утверждающие также всеобщность математических теорем.

Большие возможности для подобных проявлений научного прекрасного в самой математике создает метод координат, предложенный Декартом: этот метод создает единство между алгеброй и геометрией. Первокурснику-математику университета, только-только знакомящийся с элементами аналитической геометрии, знакомо чувство удовольствия, которое рождается при применении очень простых алгебраических методов для решений некоторых геометрических задач, ранее (в средней школе) решаемых синтетическими, часто искусственными и сложными методами. Это удовольствие, полученное от проявлений первого и второго признаков научного прекрасного Хатчесона.

Признаки научного прекрасного единства многообразий и всеобщности широко проявляются в аксиоматическом методе построения теорий. В системе аксиом векторного пространства, например, объединяется то, что общее для прямой – одномерной, плоскости – двухмерной, пространства – трехмерного и, вообще, любого примера векторного пространства /заданного над фиксированным полем/, и на основе этой системы, составленной из нескольких свойств, развивается одна из важнейших теорий, лежащей в основе современной математики. Здесь проявляется признак научного прекрасного – единства многообразий, что является одним из факторов эстетической привлекательности теории векторных пространств. Далее, результаты, полученные в этой общей теории, применяются для конкретных примеров векторных пространств. Это уже проявление всеобщности – второго признака научного прекрасного Хатчесона. Его эстетическая привлекательность очевидна, так как математический факт устанавливается не для каждого отдельного примера векторных пространств (что было бы очень трудоемко и тоскливо), а исходит из общих соображений о фактах векторного пространства. Подобные заключения можно сделать относительно любой алгебраической системы. Можно сказать, что изящество современной математики, в частности – алгебры, обусловлено именно первым и вторым признаками научного прекрасного Хатчесона.

Признаки единства многообразий и всеобщности широко проявляются и в школьном курсе математики. Рассмотрим ситуацию из опыта моего учителя [5].

Мой школьный учитель, уважаемый Анушаван, обладал особенным преподавательским даром. Однажды, зайдя в класс, он провел на доске две параллельные линии. На нижней из них отметил отрезок, а на верхней взял две точки и соединил их с концами отрезка – получилось два треугольника. «Какой из них обладает большей площадью?» – спросил уважаемый Анушаван. Не получив нужного ответа от нас, уважаемый Анушаван вытер доску и объявил тему нового урока: «Формула площади треугольника». После объяснения урока он опять вытер доску, выделил формулу $S = 0{,}5ah$ площади треугольника на ее краю, снова провел те же параллельные линии с отрезком, точками и треугольниками и повторил свой вопрос. Кажущееся невозможным сравнение становилось очевидным, благодаря простой математической формуле. Читая уже в наших глазах решение поставленной задачи, наш учитель вдохновенно сказал: «Вот сила математики». Потом он положил мел на край доски, вытер руки и вышел из класса, хотя звонка еще не было. А мы на этот раз не выбежали из класса, как обычно делали после ухода учителя. Конечно, проявление силы математики было очевидно, но нам показалось еще что-то – выше этой силы – что-то притягивающее, привлекательное, и это видимо было связано с двумя признаками научного прекрасного Хатчесона.

А вот и пример из моего опыта. Много лет назад в созданной мною частной школе я преподавал алгебру и параллельно с построением языка алгебры проводил его сравнение с арифметическим языком, его возможностями. Это позволило учащимся лучше понять возможности алгебры, вызвало интерес к ней. После ввода понятия неизвестного в теме «Азбука алгебры», я обычно задавал такой вопрос: «Как вы думаете, сколько денег у меня?» Так как учащиеся уже были знакомы с понятием неизвестного, то нужный мне ответ вроде «У Вас x рублей» я получал. На вопрос же «Сколько денег у вас?» ответы были разными, но с конкретными числами. Здесь я проводил первую параллель между алгеброй и арифметикой: то, что мы знаем, сколько денег у нас, – это арифметика, а то, что мы знаем, сколько денег у других, – это уже алгебра. Конечно, преимущество алгебры здесь кажется очевидным, но оно имеет некоторый виртуальный характер, и приведенное сравнение не производит особенного впечатления на учеников. Следующее сравнение алгебры и арифметики я проводил в рамках изучения сложения (и других операций) в курсе алгебры и привел такое рассуждение: арифметика позволяет найти сумму известных величин, а прибегая к алгебре, можно найти сумму неизвестных величин. Например, если у одного ученика x рублей, у другого – y рублей, то у них вместе будет $x + y$ рублей. Интерес к этому новому сравнению как будто немного возрастает, тем не менее, скептицизм остается, так как из алгебраической операции сложения как будто нет никакой пользы. Тогда я попытался убедить учеников в том, что указанная и другие алгебраические операции с неизвестными – не фокус и не магия, а действия, направленные на познание истины и решение повседневных задач, в чем мы неоднократно убедимся впоследствии. А для окончательного убеждения учащихся я привел одну из развлекательных задач прекрасного армянского математика 7-го века Ананиа Ширакаци. Для этой цели хорошо подходят первые три его развлекательные задачи – храхчанакани [6]. Вот третий храхчанакан Ширакаци:

«Скажи другу твоему, что я могу узнать, сколько денег у него в кошельке. Если он скажет «попробуй», ты скажи ему: возьми количество своих денег, добавь столько же, удвой его, добавь еще раз заданное число и полученную сумму опять удвой. Когда он закончит свои вычисления и сообщит тебе результат, раздели его на десять. Полученное число и будет количеством денег в его кошельке».

Если обозначим сумму в кошельке через x, то условия задачи ведут к вычислению выражения $(2(x + x) + x):10$. Но очевидно, что это выражение равно x, т.е. Ширакаци в скрытой форме требовал другу сообщать именно число x. В этом случае учащиеся уже чувствуют силу и очарование алгебры, что опять связано с двумя признаками научного прекрасного Хатчесона.

Математическая формулировка научной закономерности. Согласно этому принципу эстетики математики, приведенной М.В. Волкенштейном, любая четкая и гармоническая формулировка научной истины на языке математики приносит эстетическое впечатление [7].

Общеизвестна роль математики и математического языка в процессе формулировки закономерностей физики. Впечатления от математической формулировки законов механики, например, были настолько велики, что Ньютон рассмотрел их как доказательство существования Бога. Есть много биологических закономерностей, которые описываются или представляются при помощи математических формул. Рассмотрение таких закономерностей на уроках математики имеет не только познавательное значение, но и придает эстетическую окраску изучаемому материалу. Привлечение же соответствующих материалов в учебниках делает их привлекательным для учащихся. Приведем примеры из учебников [8].

1. В англоязычных странах температуру воздуха измеряют по шкале фаренгейта. Связь шкал Фаренгейта (F) и Цельсия (C) выражается формулой $F = 1{,}8C + 32$: Приводятся задачи, когда неизвестной является F или C.

2. Знаете ли Вы, что температуру воздуха можно определить, слушая крикет? Если обозначать через n число скрипов, выпущенных крикетом за одну минуту, то температуру воздуха по Фаренгейту можно определить по формуле $F= 0{,}25n + 37$. Приводятся задачи, когда неизвестной является F, n или C.

3. Вес нормального мужчины в килограммах можно определить по формуле $m = 0{,}9h – 90$, где h – его рост в сантиметрах. Приводятся задачи, когда неизвестной является m или h.

Некоторые учителя исходят из важности этого признака, когда важные формулы берут в рамки. В этот ряд нужно включить также моделирование текстовых задач. Однако здесь намечается некоторая переоценка значения математической записи: учащиеся (часто и учитель) создавая математическую модель текстовой задачи – записывая соответствующее уравнение или неравенство, решает его и на этом считает дело сделанным, не обращая внимания на анализ самой задачи. Не следует думать, что это делается исходя из этических соображений (имея в виду эстетику математической записи задачи). Просто в подобных случаях учащего интересует только ответ задачи и исполнение поручения учителя, что далеко от эстетических мотивов.

Применимость. Широки области применения математики. С древних времен люди понимали незаменимую роль вычисления и измерения при организации жизни. И параллельно с улучшением жизни, развитием цивилизаций увеличилась роль математики, ее прикладное значение в самих различных сферах жизнедеятельности человека. Более того, математика является одним из главных факторов подобных развитий, ее ведущей силой. А чем обусловлено подобное большое практическое значение отрасли науки, имеющей виртуальный характер по форме и содержанию?

Конечно, речь не о старинных методах подсчетов и измерений, хотя эти процедуры сохраняют свою актуальность и сегодня. Речь в первую очередь идет о взаимосвязях математики с природой. Как отмечает Великий Галилей, «Книга природы написана на языке математики» и для чтения этой книги нужно знать язык математики. Отсюда следует, что без знания языка математики никакая наука, направленная на исследование природы, не может достичь существенных успехов. Поэтому и математика получила беспрецедентное применение в исследованиях природы и в некоторых отраслях науки. Подобные применения математики сделают надежными полученные результаты, увеличивает вес истины в проведенных исследованиях, т.е. математика приносит в любую область науки познание и истину. Применение математики в физике, химии, экономике и других естественных и некоторых гуманитарных науках подтверждают сказанное. Более того, эти науки в своих современных формах обязаны математике.

Но разве природа является объектом исследования только науки? А искусство? Разве она не является формой познания природы, и не нужно ожидать применения математического языка и в этой области познания? И, действительно, математика имеет широкое применение в таких областях искусства, как архитектура, изобразительное искусство, музыка. В архитектуре такое применение становится возможным благодаря симметрии и пропорции. Важными элементами изобразительного искусства являются перспектива, параллельное проектирование, аксонометрия – чисто геометрические понятия, которые и позволяют применение математики в данной области искусства. Применение математики в музыке осуществляется посредством пропорций. Математика может найти применение и в литературе, в театре, кино, в танцах и во многих других областях искусства, вводит там «порядок и закон».

Математика имеет широкое применение в технике. При помощи одной из «жемчужин» геометрии – теоремы Пифагора, например, можно получить ответ на один из важнейших вопросов, поставленных природой перед человеком. В организации жизнедеятельности человека важную роль играет построение прямого угла. В самом деле, без этого знания невозможно осуществлять построения не только больших архитектурных сооружений, но и любого строительства вообще. Можно смело сказать, что прямой угол – основа строительства. Поэтому отвес – инструмент, позволяющий проверить перпендикулярность стены строительства, является самым необходимым инструментом каменщика. Но та же задача решает и теорема Пифагора (вернее – обратная теорема Пифагора): если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник прямоугольный. Строители часто у себя держат треугольник с размерами сторон 3, 4, 5 и, используя обратную теорему Пифагора, проверяют прямоту углов. Часто такие треугольники изготавливаются при помощи веревок, что делает более удобным их использование. Следует отметить, что такие пифагоровы треугольники позволяют построить прямые углы на горизонтальной (и на любой) плоскости, что нельзя сказать об отвесе.

Ясно, что как признак Волкенштейна, так и признак применимости математики можно рассматривать как частные случаи принципов единства многообразий и всеобщности Хатчесона. В самом деле, любая запись законов природы или прикладной задачи на математическом языке является выражением единства в многообразии, а в разнообразиях применений такой математической записи проявляется всеобщность научной истины. Например, если количество а депозита каждый год в банке увеличивается на p%-ов, следует, то через n лет будет $a(1+\frac{p}{100})^n$, и эта закономерность является выражением единства в многообразии, а ее применение конкретных для значений параметров a, p, n – проявлением всеобщности научной истины. Здесь в обоих случаях мы имеем дело с научной красотой.

Эстетический принцип применимости можно успешно использовать в процессе обучения математике. Выше я рассказал об одном моем школьном учителе. Другой мой школьный учитель, уважаемый Ваграм, перед началом изучения теоремы Пифагора привел нас на небольшой прямоугольный школьный участок, предложил двум ученикам, начиная с угла участка, начать двигаться по его сторонам и измерять пройденный путь. Сам же, с загадочной улыбкой на лице, сообщал расстояние между учениками после каждого такого измерения и никогда не ошибался. Конечно, мы были удивлены, а уважаемый Ваграм после своих экспериментов проводил нас в класс и после объявления о том, что сейчас он раскроет секреты своего «волшебства», на доске написал тему нашего урока: «Теорема Пифагора» – и раскрыл тайну самой прекрасной геометрической сокровищницы.

Конечно, мои уважаемые учителя ничего не знали об Хатчесоне и, возможно, об эстетике математики вообще. Но они интуитивно чувствовали наличие эстетического в математике и умело вводили ее элементы в процесс преподавания.

Список использованной литературы

1. Микаелян Г.С. Логические признаки научной эстетики в процессе обучения математике / Г.С. Микаелян // Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки. – 2016. – № 18. – С. 85–93.
2. Микаелян Г. С. Образующие признаки научной эстетики в процессе обучения математике: порядок / Г.С. Микаелян // Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки. – 2017. – № 6. – С. 106–110.
3. Микаелян Г.С. Образующие признаки научной эстетики в процессе обучения математике: гармония / Г.С. Микаелян // Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки. – 2017. – № 7. – С. 88–93.
4. Хатчесон Ф. Исследование о происхождении наших идей красоты и добродетели // Хатчесон Ф. Эстетика // Ф. Хатчесон, Д. Юм, А. Смит. – М., 1973. – 482 с.
5. Микаелян Г.С. Прекрасное и образовательный потенциал математики / Г.С. Микаелян. – Ереван : Эдит Принт, 2015. (на армянском языке).
6. Петросян Г.Б. Математика в древней и средневековой Армении / Г.Б. Петросян. – Ереван, 1959. – 437 с.
7. Волькенштейн В.М. Опыт современной эстетики. – М.–Л. : Academia, 1931. – 188 с.
8. Микаелян Г.С. Алгебра–7, 8, 9. Учебники для общеобразовательной школы / Г.С. Микаелян. – Ереван : Эдит Принт, 1999; 2006, 2007, 2008 (на армянском языке).

References

1. Mikaelian, H.S. (2016). Logical signs scientific aesthetics in the process of teaching mathematics, *Bulletin Cherkassky University. A series of Pedagogical Sciences, 18, 85–93*. (in Rus.).
2. Mikaelian, H.S. (2017). Generating signs of scientific aesthetics in the process of teaching mathematics: order. *Bulletin Cherkassky University. A series of Pedagogical Sciences, 6, 106–110*. (in Rus.).

3. Mikaelian, H.S. (2017). Generating signs of scientific aesthetics in the process of teaching mathematics: harmony. *Bulletin Cherkassky University. A series of Pedagogical Sciences, 7, 88–93*. (in Rus.).
4. Hatcheson, F. (1973). *Enquiry into the original of our ideas of beauty and virtue*. In F. Hutcheson, D. Hume, A. Smith. Aesthetics. Moscow. (in Rus.).
5. Mikaelian, H.S. (2015). *Beautiful and educational potential of mathematics*. Yerevan: Edit Print. (in Arm.).
6. Petrosyan, G.B. (1959). Mathematics in ancient and medieval Armenia, Yerevan: Publishing house of Yerevan State University. (in Arm.).
7. Volkenshtein, V.M. (1931). Experience of modern aesthetics, Moscow–Leningrad: Academia. (in Rus.).
8. Mikaelian, H.S. (1999, 2006, 2007, 2008). *Algebra–7, 8, 9*. Textbook for secondary school. Yerevan: Edit Print, (in Arm.).

MIKAELIAN Hamlet,

Doctor in Pedagogy, Ph.D in Physics-and-Mathematics, Professor, Chair of Mathematics and Methods of its Teaching, Khachatour Abovyan Armenian State Pedagogical University, Republic of Armenia
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

THE UNITING SIGNS OF SCIENTIFIC BEAUTY IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS

Abstract. *In works [1–3] we presented the logical and forming groups of objective attributes of the scientific beauty in the learning process of mathematics. The last group of objective features of the scientific beauty are the unifying signs. The unification of things, phenomena, people, societies, etc., arrives the generality of certain properties and can have both a positive and a negative meaning. However, in mathematics (and science in general) only the positive side of this process is seen and, consequently, the manifestations of unity here are considered beautiful. In this paper we will consider the following unifying signs of the scientific beautiful: unity in diversity and universality, applicability, a mathematical record of scientific regularity.*

Unity in diversity is the first criterion proposed by Hutcheson as a general aesthetic principle for evaluating beauty both in nature and in science. This criteria is realizing in general theorem of mathematics. However, the application of any theorem for any particular case or the derivation from it of any consequence Hutcheson considers perfect, and this is the second sign of the beautiful Hutcheson – a sign of universality. These signs of the scientific beauty, characterizing Hutcheson, are widely manifested in the applications of mathematics in the very diverse branches of science and technology. These applications of mathematics express by themselves, the unity of various phenomena of science and technology, which also affirm the universality of mathematical theorems.

According M. V. Volkenstein, any clear and harmonious formulation of scientific truth in the language of mathematics brings an aesthetic impression, and such a record is the principle of aesthetics of mathematics [7]. This principle is widely manifested in the interdisciplinary connections of mathematics in the teaching mathematics.

Key words*: teaching mathematics; Aesthetics of mathematics; Scientific beautiful.*

Одержано редакцією 12.06.2017
Прийнято до публікації 16.06.2017