pedagogical experience in the development of mathematical education in Ukraine and in foreign countries; The essence, structure and characteristics of innovative processes in mathematical education; Innovative pedagogical activity of the teacher of mathematics and its structure; Main directions and levels of innovative pedagogical activity of the teacher of mathematics; Readiness of the teacher of mathematics for innovative pedagogical activity; Use of innovative information technologies in mathematical education; STEAM-direction of innovation changes in mathematical education; Design and implementation of innovations in mathematical education.

Originality. *For the first time, the academic discipline was proposed is aimed at forming the readiness of future mathematics teachers for innovative pedagogical activities.*

Conclusion. *The educational discipline «Fundamentals of innovative pedagogical activity of the teacher of mathematics» is an important part of the continuous process of forming the readiness of future teachers of mathematics for innovative pedagogical activity. Achievement of the purpose and fulfillment of the tasks of the discipline is possible provided that an innovative educational environment is created in the course of studying the course, which involves the use of innovative forms of lecture, practical and laboratory classes (In particular, lectures of the conference, video lectures, lectures on the basis of the case-method, practical with elements of training, practical conference, laboratory classes in the form of a business game), organization of quasi-professional activity of students in the process of classroom work and non-auditing independent work, use of information and communication technologies both in the process of classroom classes, and for the implementation of elements of mixed learning, the use of innovative forms and methods of control.*

Keywords: *readiness for innovative pedagogical activities, innovative pedagogical activity, teacher of mathematics.*

Одержано редакцією 03.09.2017 р.
Прийнято до публікації 10.10.2017 р

УДК 519.1:371.315.2

ЩЕРБАКОВ П. Н.,
доцент кафедры высшей математики ГВУЗ «Национальный горный университет»
КЛИМЕНКО Д. В.,
старший преподаватель кафедры высшей математики ГВУЗ «Национальный горный университет»

ТЕОРИЯ ГРАФОВ В ПРИЛОЖЕНИИ К КОМБИНАТОРИКЕ

В статье предложен метод графического представления основных понятий комбинаторики с целью эффективного объяснения материала. Этот метод позволяет визуально проследить логические связи между элементами, которые формируют определенную совокупность. Накопленные наблюдения и педагогический опыт показали, что вспомогательные графы, построенные к задачам, облегчают студентам восприятие материала.

Ключевые слова: *граф-дерево, комбинации, перестановки, размещения, сочетания, объяснение.*

Постановка проблемы. Глубокое понимание основных положений комбинаторики, закономерностей, которые формируют различные комбинации элементов, а также умение правильно их распознавать и вычислять зачастую является проблемой для студентов в курсе теории вероятностей. Они по-разному усваивают новые теоретические положения читаемого курса: среди них найдутся и редко встречающиеся аудиалы, и практичные кинестетики, и образно мыслящие визуалы.

Исследования и накопленный опыт показали, что именно визуальные наблюдения помогают студентам различных категорий (по типу восприятия информации) глубже понять и запомнить те закономерности, которые по определённому признаку объединяются в абстрактную форму. Информационно-аналитический портал *GoGetNews.info* от 23 апреля 2016 года сообщал, что канадские психологи из Университета Ватерлоо проводили эксперименты по запоминанию слов, в которых участвовали студенты. Было отмечено преимущество запоминания слов, представленных в виде рисунка, и названо особым термином «drawing effect» (*рус.* эффект рисования).

Применим эффект рисования при изучении некоторых понятий комбинаторики в виде использования графов.

Анализ исследований и публикаций. Объяснение основных определений комбинаторики, как правило, сопровождается иллюстрацией всех комбинаций, которые возможны в рассматриваемой ситуации. Например, в работе [1] с помощью дерева показано при решении задачи размещение трёх книг, выполнена иллюстрация принципа умножения, введено пространство событий, отвечающее эксперименту. Это эффективный педагогический приём, однако объяснение других задач, связанных с выбором комбинаций элементов, выполнено без применения граф-дерева. В работах [2, 3] детально рассмотрены основные комбинации, но их перечисления выполнены в виде таблиц, графические объекты отсутствуют.

Цель статьи – представить фрагменты лекционного и практического материала, которые дают студентам реальную возможность понимания сущности природы комбинаций элементов таких, как перестановки, размещения и сочетания, научить их распознавать и вычислять эти комбинации, используя для каждого случая соответствующее граф-дерево.

Изложение основного материала. Предложим методику решения типовых задач по комбинаторике, которая использует построение графических объектов всех логических связей, существующих между рассматриваемыми элементами. Будем называть такой графический объект граф-дерево или дерево.

Задача 1. Имеется десять букв разрезной азбуки, а именно *А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т*, которые произвольно выкладываем в ряд.

Вопрос 1.1. Сколько существует способов получить слово *МАТЕМАТИКА*?

Вопрос 1.2. Сколько всего существует способов расположить вышеперечисленные буквы?

Безусловно, правильные ответы на поставленные вопросы без определённой теоретической подготовки по данной теме не представляются возможными, поэтому задачи с вопросами такого типа предлагаются студентам на первом после лекции практическом занятии либо как упражнение после введения понятий «размещение», «сочетание», «перестановки». Тестовые ответы предлагаем не размещать, что позволит сразу перейти к логическим размышлениям по поводу вариантов решения задачи, это сэкономит время, которое зачастую тратиться на возможность угадать студентами правильный результат. Для начала лектору следует озвучить студентам возможные логические размышления в процессе решения задачи. С этой целью обращаем внимание студентов на закономерности формирования всех комбинаций букв, находящихся в слове, и на этой основе подводим к рассмотрению формул и выбору одной из них для вычисления результата.

Объяснение студентам ответа на вопрос 1.1. В процессе решения задачи следует использовать понятие «перестановки».

Определение 1. Перестановками называются такие комбинации из n элементов, которые отличаются только порядком, входящих в них элементов. Перестановки из n

элементов по n обозначают P_n и определяют по формуле $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

К примеру, рассмотрим возможные расположения букв в слове *МАТЕМАТИКА* на примере трёх букв *А*, которые входят в это слово. Буквы *А* представим в виде упорядоченных множеств A_1, A_2, A_3 и построим граф-дерево, чтобы показать их возможное расположение в словах, составленных из букв, входящих в слово *МАТЕМАТИКА* (Рис. 1).

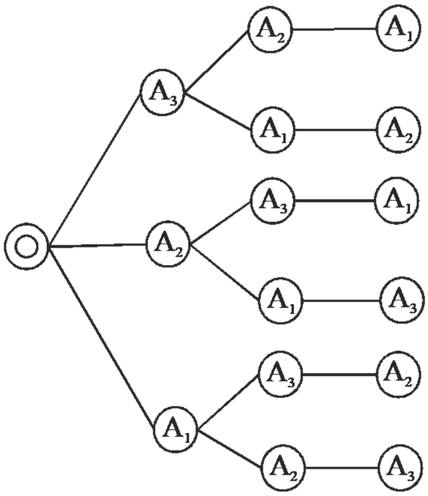

Рис. 1. *Граф-дерево для трёх элементов*

Порядок построения следующий. Исходную точку или вершину обозначим буквой *О*. Двигаясь возможными путями из этой точки к правой крайней вершине дерева, получим в результате шесть комбинаций: $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_2$, $A_2A_1A_3$, $A_2A_3A_1$, $A_3A_1A_2$, $A_3A_2A_1$.

Одновременно с перечислением всех возможных комбинаций букв *А* граф-дерево даёт и наглядное представление основному принципу умножения, который учитывает порядок расположения объектов при вычислении числа их комбинаций. Следуя этому правилу, число комбинаций букв *А* определяется произведением $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ или $3! = 6$.

Далее следует рассмотреть возможные комбинации буквы *М*, в слове *МАТЕМАТИКА* их две. Упорядоченное множество букв $\{M_1, M_2\}$ имеет две комбинации M_1M_2 и M_2M_1. Аналогично получаем и для буквы *Т* две комбинации T_1T_2 и T_2T_1.

Построим граф-дерево всех комбинаций для слова *МАТЕМАТИКА*, при этом покажем только одну его ветвь, позволяющую наглядно объяснить общую закономерность. По оставшимся буквам размышления аналогичные (Рис. 2).

По правилу умножения число комбинаций определяется следующим образом $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ или $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$.

Объяснение студентам ответа на вопрос 1.2. Десять букв слова *МАТЕМАТИКА* можно расположить произвольно на десяти местах. Используя граф-дерево, на первом месте можно расположить любую из десяти букв, на второе место располагаем любую из девяти оставшихся букв, на третье место – любую из восьми оставшихся букв. Эти действия повторяем до тех пор, пока на каждой правой ветви останется одна буква. Число комбинаций определяется произведением:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628\,800 \text{ или } 10! = 3628800.$$

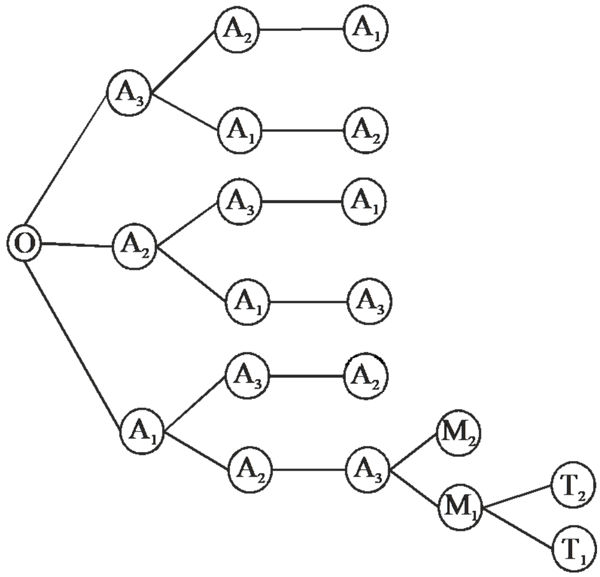

Рис. 2. Фрагмент граф-дерева для слова *МАТЕМАТИКА*

Представленные объяснения к вопросам 1.1 и 1.2 включают рассмотрение комбинаций из *n* элементов по *n*, где $n = \overline{2,10}$, которые переставлялись из одного места на другое

Когда количество переставляемых объектов велико, то построение дерева является громоздкой операцией и что парадоксально в рассматриваемом контексте, дерево-граф становится для студентов запутанным лабиринтом, поэтому достаточно продемонстрировать одну его ветвь, чтобы объяснить общую закономерность предлагаемой идеи решения задачи, что и представлено на рисунке 2.

Теперь рассмотрим принцип формирования комбинаций из *n* элементов по *r*, если $r < n$.

Задача 2. Даны пять цифр 1, 2, 3, 4, 5.

Вопрос 2.1. Сколько всего существует комбинаций в произвольном расположении этих пяти цифр?

Вопрос 2.2. Сколько трехзначных чисел можно получить из этих пяти цифр?

Вопрос 2.3. Сколько можно получить трехзначных чисел, составленных из данных пяти цифр, которые отличаются друг от друга хотя бы одной цифрой? Повторение цифр в числах при изменении их месторасположения недопустимо.

Построим фрагмент граф-дерева для пяти цифр, причем ветви, определяющие трехзначное число дополнительно выделим (Рис. 3).

Объяснение студентам ответа на вопрос 2.1. Комбинация из пяти цифр по пять цифр, как уже рассматривалось, является перестановкой, поэтому число комбинаций будет $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, что и демонстрирует рисунок 3.

Объяснение студентам ответа на вопрос 2.2. Воспользуемся правилом умножения. На первое место можно поставить любую цифру из пяти, на второе – любую цифру из четырех оставшихся и на третье – любую из трех оставшихся, то есть $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Определение 2. Размещениями из *n* элементов по *r*, где $r < n$, называются такие комбинации, которые различаются входящими в них элементами и их порядком. Обозначают A_n^r.

Проанализируем формирование таких комбинаций A_n^r, чтобы получить формулу для вычисления их количества. Пусть необходимо заполнить *r* некоторых ячеек элементами, которые выбираются из данных n элементов, где $r < n$. В первую ячейку можно разместить любой из n элементов. Оставшиеся $(n-1)$ элементов можно разместить во второй ячейке. Третью ячейку можно заполнить $(n-2)$ способами, четвертую - $(n-3)$ способами и до тех пор, пока не разместим элемент в последней r-той ячейке. В этой последней ячейке элемент можно разместить $(n-(r-1))$ способами. По принципу умножения все r ячеек можно заполнить $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1))$ способами.

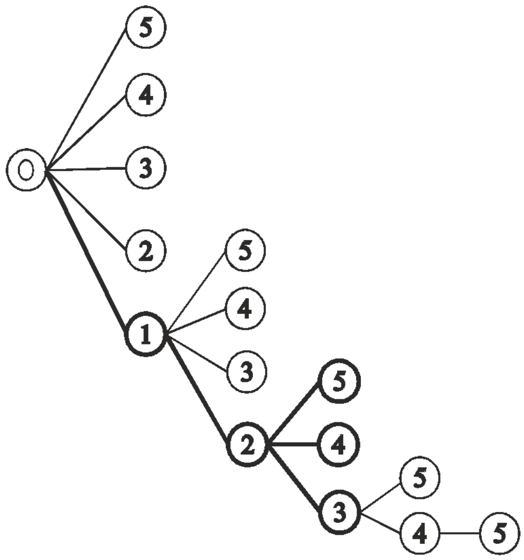

Рис. 3. Ветвь возможных расположений пяти цифр

Таким образом, получена формула для вычисления числа размещений:

$$A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1)).$$

Домножим и разделим полученное произведение на

$$A_n^r = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1))\cdot(n-r)!}{(n-r)!}.$$

Тогда

$$A_n^r = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n-r)\cdot(n-(r-1))\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{(n-r)!},$$

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Окончательно $A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1)) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Замечание. В ответе на вопрос 2.2 можно использовать размещения

$$A_5^3 = 5\cdot4\cdot\big(5-(3-1)\big) = \frac{5!}{\big(5-3\big)!} = 60.$$

Объяснение студентам ответа на вопрос 2.3.

В связи с тем, что порядок расположения цифр в трехзначном числе исключается по условию, то всего возможны десять комбинаций, а именно 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.

Число таких комбинаций можно получить следующим образом: $\dfrac{A_5^3}{P_3} = \dfrac{60}{3!} = 10$.

Определение 3. Сочетаниями из n элементов по r, где $r < n$, называют такие комбинации, которые различаются только входящими в них элементами (хотя бы одним). Обозначают C_n^r. Количество сочетаний C_n^r можно определить с помощью размещений A_n^r и перестановок P_n:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Задача 3. В студенческий совет претендуют 14 человек, среди которых 6 студентов первого курса, остальные – студенты второго курса. По существующему положению в составе студенческого совета должно быть 7 студентов, среди которых обязательно 3 студента первого курса. Сколько существует вариантов укомплектовать студсовет при тайном голосовании?

Объснение студентам решения задачи 3. Представим условие задачи с помощью вспомогательного чертежа. Будем обозначать студентов первого курса одной точкой (•), студентов второго курса знаком $(\div)$. Состав кандидатов в студсовет схематично представлен на рисунке 4.

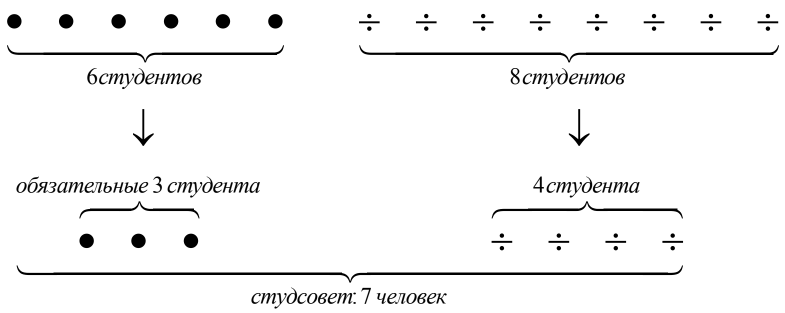

Рис. 4. Схема распределения студентов в студенческий совет

Из рисунка видно, что число комбинаций студентов первого курса, которые могут войти в студенческий совет, определяется числом сочетаний C_6^3. Число комбинаций студентов второго курса определяется с помощью сочетаний C_8^4. Используя правило умножения, получено общее число комбинаций студентов, входящих в студсовет:

$$C_6^3 \cdot C_8^4 = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} \cdot \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = 1400.$$

Выводы. 1. Основополагающие понятия комбинаторики можно рассматривать с применением теории графов, что позволяет визуально проследить логические связи между элементами, которые формируют определенную совокупность. Отмечено, что вспомогательные рисунки к задачам облегчают студентам восприятие материала.
2. Введение понятий «перестановки», «сочетания», «размещения» с помощью графов создает благоприятную основу для введения понятий «комбинации с повторениями».
3. Графическое представление условий комбинаторных задач значительно способствует правильному выбору методов их решений.

Список использованной литературы

1. Мостлер Ф. Вероятность. Пер. с англ. / Ф. Мостлер, Р. Рурке, Дж. Томас. – М.: Мир, 1969. – 431 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
3. Колосов В.А. Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики / В. А. Колосов. – М.: Гелиос АРВ, 2001. – 256 с.

References

1. Mostler F., Rourke R., Tomas J. (1969). Probability. M.: Mir. (in Russ.)
2. Gmurman V. (2003). Theory of Probability and Mathematical Statistics. M.: Vysshaya Shkola (in Russ.)
3. Kolosov V. (2001). Theorems and problems of algebra, number theory and combinatorics. M.: Gelios ARV (in Russ.)

SHERBAKOV P.,
Associate Professor of High Mathematics Department, SIHE « National Mining University»

KLYMENKO D.,
Senior Lecturer of High Mathematics Department, SIHE « National Mining University»

THE GRAPH THEORY IN APPLICATION TO COMBINATORICS.

Abstract. Introduction. *A graphical representation method of the basic concepts of combinatorics is proposed in the article. This is very effectively worked to explain some stuff for students.*

Purpose. *To present fragments of lecture and practical materials that give students a real opportunity to find out the notions such as permutations, placement and combinations. To teach students to recognize and calculate these combinations, using for each case the corresponding tree graph.*

Results. *Fragments of lectures and practical lessons are presented on topic «Combinatorics». There are questions, tasks and their solutions in this topic. What result comes out in this case? The choice of the task solution with using of tree graphs and the presented task solution is demonstrated on this basis are important.*

Originality. *A rational method for solving the problem is chosen based on the made graphs. As accumulated observations and pedagogical experience have shown, such given stuff helps students to assimilate knowledges on this topic more quickly.*

Conclusion. *The basic concepts of combinatorics can be considered using the graph theory. This theory allows to trace the logical relationships between elements that form a certain set. It is noted that auxiliary figures to tasks make it easier for students to perceive the topic. The introduction of the concepts of «permutation», «combination», «placement» with the help of tree graphs creates a favorable basis for the introduction of the concepts «combinations with repetitions». Graphical representation of the conditions of combinatorial problems greatly contributes to the correct choice of methods for their solutions. The systematic use of tree graphs in this topic contributes to the development of skills in solving combinatorial tasks among students.*

Keywords: *tree graph, combination, permutation, placement, explanation.*

Одержано редакцією 29.09.2017 р.
Прийнято до публікації 10.10.2017 р

УДК 378: 793.3 – 051

АНДРОЩУК Л. М.,
кандидат педагогічних наук,
доцент, завідувач кафедри
хореографії та художньої культури
Уманського державного педагогічного
університету імені Павла Тичини
e-mail: vizavi1974@ukr.net

РОЛЬ НАУКОВО-ПРАКТИЧНИХ КОНФЕРЕНЦІЙ У СТАНОВЛЕННІ СИСТЕМИ ХОРЕОГРАФІЧНО-ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ В УКРАЇНІ