УДК 373.51:37.032

МИЛУШЕВА-БОЙКИНА Добринка Василева,
доктор (PhD), доцент кафедры Обучение математике, информатике и информационным технологиям, ФМИ, Пловдивского университета им. Паисия Хилендарского, Болгария
e-mail: boykin@abv.bg

МИЛУШЕВ Васил Борисов,
доктор педагогических наук, профессор Пловдивского университета им. Паисия Хилендарского, Болгария
e-mail: milushev_vassil@abv.bg

МЕТОДИКА И МЕТОДЫ СОСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Обоснована актуальность деятельности составления задач школьного курса математики и реализована конкретная методика составления задач методами аналогии, обобщения, специализации, конкретизации. Представлены модели взаимосвязей составленных задач, рассматриваемых как система.

Ключевые слова: *задача, методика, методы составления задач, обобщение, аналогия, специализация, конкретизация.*

Постановка проблемы. Всем известно, что решение неалгоритмических и эвристических математических задач в значительной степени является творческой деятельностью, в которой, кроме знания по математике, проявляются еще математическая интуиция и воображение. Разумеется, в более высокой степени проявляется творчество при *составлении* задач, так как для реализации этой деятельности необходимо не только глубокое познание рассматриваемых математических объектов, но и более углубленное понимание структуры задач, а также и выявление математических способностей субъекта. Выдающийся математик-педагог А. А. Столяр указывает, что «наиболее эффективным средством развития математической деятельности учащихся является обучение «через задачи». Поэтому возникает проблема построения педагогически целесообразной системы задач, с помощью которой можно было бы провести ученика последовательно через все аспекты математической деятельности…. Названная проблема стоит прежде всего перед составителями учебников и сборников задач, но она отчасти возникает и перед учителем в его практической деятельности» [1, с. 190].

Анализ последних исследований и публикаций. В теории и практике обучения математике обстоятельно исследован вопрос об обучении посредством «решения задач» ([2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14] и др.), причем в начале 21 века это обучение уже связывается с рефлексивно-синергетическим подходом ([15; 16; 17; 18]). Однако, проблемы, касающие обучения посредством «составления задач» ([1; 19; 20] и др.), недостаточно разработаны. В связи с этим еще более актуально, чтобы студенты – будущие учителя математики умели составлять задачи [21]. Для этой цели нами исследованы теоретические основы деятельнности «составления задач» для школьного курса математики ([22; 23; 24; 25]), а также разработана выбираемая учебная дисциплина (специальный курс) для студентов специальностей математики и информатики, физики и математики, названной «Методы и методика составления задач школьного курса математики.» Укажем некоторые основные темы этого курса: Задачи в школьном курсе математики; Аналогия, обобщение, специализация, конкретизация и применение при составлении задач; Параметризация и ее применение для решения и составления задач; Составление задач методом «обращения»; Составление задач по темам: тождества, уравнения, неравенства, системы; Метод субституции; Составление текстовых задач по данной математической модели. Нами опубликована методическая статья по теме: Составление математических задач методом «обращения» [26].

Из-за ограничения в объеме статьи, в ней невозможно обхватить все указанные темы. Поэтому рассмотрим только некоторые методы составления задач.

Цель статьи – представить конкретные базисные задачи и методику применения методов аналогии, обобщения, специализации и конкретизации для составления задач школьного курса математики и иллюстрировать это на конкретных примерах, выявляя взаимосвязи составленных задач, рассматриваемых как система.

Изложение основного материала. Указанные методы используют как в науке математики, так и при обучение математике для формулировки новых утверждений и составления новых задач. Для этой цели сначала осуществляется анализ формулировки конкретной задачи школьного курса, которую, для определенности, в нашей работе будем называть «базисной». Иногда оказывается, что формулировка базисной задачи является неподходящей, чтобы сделать обобщение. В таком случае, в результате проведения анализа такой задачи, мы переформулируем ее в более удобную для обобщения форму. Обычно в условии каждой задачи задаются некоторые ограничения для ее объектов или содержатся некоторлыеконстанты. В таких случаях обобщение можно сделать следующими способами:

a) отстранением данного ограничения;

b) заменой данной константы параметром;

c) комбинацией способов *a*) и *b*).

В работе, для удобства, базисные задачи будем обозначать так: Задача 1, Задача 2, ..., а задачи, которые составлены от базисной Задачи 1 посредством метода аналогии, обозначим через: Задача $1a_1$, Задача $1a_2$, …; а обобщенные задачи, полученные от ней отстранением некоторого вида ограничения или заменой его параметром, – через: Задача $1o_1$, Задача $1o_2$, … . При отстранении другого ограничения или при его замене новыми, соответствующие обобщенные задачи, полученные от Задачи $1a_1$, будем обозначать через: Задача $1a_1o_1$, Задача $1a_1o_2$ и т.д.

Переходим к примерам. Рассмотрим следующую задачу по геометрии для 8-го класса болгарской школы.

Задача 1'. Дан отрезок AB. Через его середину M построена произвольная прямая $\boldsymbol{p}$. Если $|AA_1|$ и $|BB_1|$ – расстояния соответственно от точек A и B до прямой $\boldsymbol{p}$, доказать, что $|AA_1| = |BB_1|$.

Доказательство элементарно. Однако это формулировка задачи 1' неудобна для обобщения. Поэтому запишем равенство в следующем виде $|AA_1| - |BB_1| = 0$, откуда следует векторное равенство $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{0}$. Таким образом, в качестве <u>базисной</u> принимаем следующую задачу.

Задача 1. Дан отрезок AB. Через его середину M построена произвольная прямая $\boldsymbol{p}$. Если $|AA_1|$ и $|BB_1|$ – расстояния соответственно от точек A и B до прямой $\boldsymbol{p}$, доказать что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{0}$.

Сделаем анализ базисной задачи 1. В ней есть несколько ограничений: фигура – отрезок AB, точка M – середина AB, $\boldsymbol{p}$zM, $AA_1 \perp \boldsymbol{p}$, $BB_1 \perp \boldsymbol{p}$. Так как точка M является «центром тяжести» отрезка AB, а центром тяжести треугольника является его медицентр, то если фигуру «отрезок» заменим фигурой «треугольник» и обозначим через M его медицентр, можно составить методом ***аналогии*** следующую задачу.

Задача $1a_1$. Дан треугольник *ABC*, точка *M* – медицентр. Через точку *M* построена произвольная прямая ***p***. Если $|AA_1|$, $|BB_1|$ и $|CC_1|$ – расстояния соответственно от точек *A*, *B* и *C* до прямой ***p***, доказать, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Если данную фигуру треугольник заменим фигурой «тетраэдр» и обозначим с *M* его медицентр, а прямую ***p*** заменим плоскостью α, можно сформулировать следующую аналогичную задачу.

Задача $1a_2$. Дан тетраэдр *ABCD*. Через его медицентр построена произвольная плоскость α. Если $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ и $|DD_1|$ – расстояния соответственно от точек *A*, *B*, *C* и *D* до плоскости α, доказать, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{0}$.

Вернемся опять к базисной задаче 1. Если поставим вопросы: «Почему точка *M* должна быть серединой? Возможно ли произвольное положение точки *M* на отрезке *AB*?», то можно сформулировать посредством метода ***обобщения*** следующую задачу.

Задача $1o_1$. Дан отрезок *AB*. Точка $M \in AB$ (не середина). Прямая ***p***z*M*. Построены $AA_1 \perp \boldsymbol{p}$ и $BB_1 \perp \boldsymbol{p}$. Найти какая связь существует между векторами $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

Пусть точка *G* середина отрезка *AB* и $GG_1 \perp AB$. Без ограничения можно принять, что, например, точка *M* лежит между точками *G* и *B* ($M \in GB$). Тогда будет выполнено $\frac{AA_1}{GG_1} = \frac{AM}{MG} = \frac{AG+GM}{MG} = \frac{AG}{MG} + 1$ и $\frac{BB_1}{GG_1} = \frac{MB}{MG} = \frac{BG-GM}{MG} = \frac{BG}{MG} - 1 = \frac{AG}{MG} - 1$, откуда следует, что $\frac{AA_1}{GG_1} - \frac{BB_1}{GG_1} = 2$, т.е. $GG_1 = \frac{1}{2}(AA_1 - BB_1)$, а в векторном виде: $\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1})$. Этот результат является обобщением результата базисной Задачи 1, а Задача $1o_1$ есть ее обобщение. Наоборот, результат задачи 1 можно получить от результата Задачи $1o_1$ при частном положении точки *M* (когда $M \equiv G$). Поэтому можно сказать, что Задача 1 получается от Задачи $1o_1$ посредством метода ***специализации***.

Задачу $1a_1$ тоже можно обобщить.

Задача $1a_1o_1$. Даны треугольник *ABC* и произвольная прямая ***p*** на его плоскости. Если $AA_1 \perp \boldsymbol{p}$, $BB_1 \perp \boldsymbol{p}$ и $CC_1 \perp \boldsymbol{p}$. Найти связь между векторами $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.

Пусть *G* – медицентр треугольника *ABC* и $GG_1 \perp \boldsymbol{p}$. Тогда легко установить, что $\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$.

Эту задачу можно рассматривать и как полученную из задачи $1o_1$ посредством метода ***аналогии***, при которой фигура «отрезок» заменяется фигурой «треугольник» и коэффициент $\frac{1}{2}$ заменяется коэффициентом $\frac{1}{3}$. Поэтому эту задачу можно обозначить и так: Задача $\mathbf{1o_1a_1}$.

Этими же методами возможно составить и задачу для тетраэдра, которую можно рассматривать и как обобщение Задачи $\mathbf{1a_2}$, и как аналогичную Задаче $\mathbf{1o_2}$, т.е. новую задачу можно обозначить или так: Задача $\mathbf{1a_2o_2}$, или так: Задача $\mathbf{1o_2a_2}$. Причем методом аналогии можно предвидеть и результат, а именно:

Задача $1a_2o_2$. Даны тетраэдр *ABCD*, для которого *G* – медицентр, и произвольная плоскость α. Если $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$, $|DD_1|$ и $|GG_1|$ – расстояния от точек *A*, *B*, *C*, *D* и *G* соответственно до плоскости α, доказать, что $\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1})$.

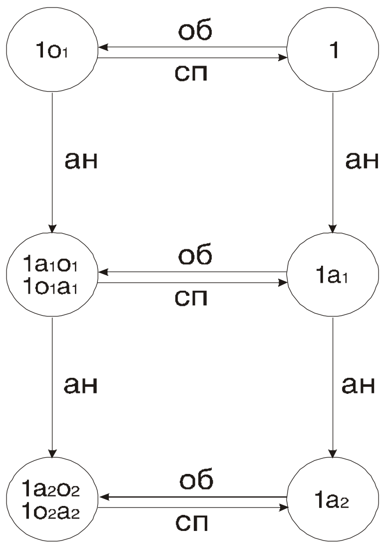

Рис. 1

Между рассмотренными задачами существуют связи, которые можно представить моделью на рисунке 1.

Задача 2'. Даны равносторонний треугольник *ABC* и точка *P* – внутри него. Если d_1, d_2, d_3 – расстояния от точки *P* до сторонам треугольника, а *h* – его высота, доказать, что $d_1 + d_2 + d_3 = h$.

Сделаем анализ базисной задачи 2'. В ней есть следующие ограничения: фигура – равносторонний треугольник, положение точки *P* – внутренняя для треугольника, *h* – высота в треугольнике. Если хотим составить новые задачи методом аналогии, здесь приходится сделать переформулировку данной задачи 2', ибо не существует понятие «высота» в любом многоугольнике (например в пятиугольнике). Так как каждый равносторонний треугольник является правильным и его высота $h = 3r$, где *r* – радиус вписанной в нем окружности, а для каждого правильного многоугольника существует вписанная окружность, то в качестве *базисной задачи* удачна следующая формулировка

Задача 2. Даны правильный треугольник *ABC* и точка *P* – внутри него. Доказать, что $d_1 + d_2 + d_3 = 3r$, где d_1, d_2, d_3 – расстояния от точки *P* до сторонам треугольника, а *r* – радиус вписанной окружности.

Теперь методом ***аналогии*** сформулируем следующие две задачи:

Задача 2а$_1$. Даны правильный четырехугольник (квадрат) *ABCD* и точка *P* в нем. Если d_1, d_2, d_3, d_4 – расстояния от точки *P* до сторонам квадрата, а *r* – радиус вписанной окружности, доказать, что $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 4r$.

Задача 2а$_2$. Даны правильный шестиугольник *ABCDEF* и точка *P* в нем. Если d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 – расстояния от точки *P* до его сторонам, а *r* – радиус вписанной окружности, доказать, что $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 6r$.

Сравнивая заключения базисной задачи **2** и этих новых задач, аналогично можно сделать следующее ***обобщение*** по числу (количеству) сторон многоугольника.

Задача 2а$_0$. Доказать, что для каждого правильного *n*-угольника, в котором точка *P* внутренняя, сумма расстояний от точки *P* до его сторон равна $n.r$, где *r* – радиус вписанной окружности, а *n* – число сторон многоугольника.

Все эти задачи получены от базисной задачи **2** посредством заменой ограничения «правильный треугольник» другой правильной фигурой.

А теперь попытаемся сделать ***обобщение*** в зависимости от местоположений точки *P*. Можно проверить непосредственно, что:

- если точка *P* принадлежит некоторой стороны правильного треугольника, (например, $P \in AB$), утверждение в задаче **2** остается в силах;
- если точка *P* совпадает с некоторой вершиной треугольника, очевидно тоже выполнено искомое равенство.

Следовательно можно сделать следующее ***обобщение*** в зависимости от местоположении точки *P* относительно сторон треугольника.

Задача 2о$_1$. Дан правильный треугольник *ABC*. Если точка *P* не является внешней для треугольника *ABC*, докажите, что сумма расстояний от точки *P* до его сторон равна $3r$, где *r* – радиус вписанной окружности.

Чтобы совершить дальнейшее ***обобщение***, обхватывающее и случай, когда точка *P* вне треугольника, необходимо ввести понятие «ориентированное расстояние». И так, если точка *P* и точка *C* лежат в противоположных полуплоскостях с контуром *AB*, а точки *P* и *A* лежат в одну и ту же полуплоскости с контуром *BC*, а также точки *P* и *B* лежат в одну и ту же полуплоскости с контуром *AC*, то «ориентированное расстояние» d_3 (от *P* до *AB*) считается отрицательным, а расстояния d_1 и d_2 – положительными. Тогда выполнено равенство $d_1 + d_2 - d_3 = 3r$.

Все это дает основание сделать второе *обобщение* по отношению местоположения точки *P*.

Задача 2о$_2$. Для каждого правильного треугольника *ABC* и любой точки *P*, лежащей на его плоскости, сумма ориентированных расстояний от точки *P* до сторон треугольника равна 3*r*, где *r* – радиус вписанной окружности.

Посредством метода аналогии, из Задачи **2о$_1$** и Задачи **2о$_2$**, можно составлять соответствующие задачи для правильного четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника и т.д. – на рисунке 2 эти задачи отмечены обозначениями 2о$_1$а$_1$, 2о$_2$а$_1$, 2о$_1$а$_2$, 2о$_2$а$_2$, … и т.д. Сформулированное утверждение при некоторых из этих задач может оказаться неверным. Это дает возможность ставить исследовательские задачи перед студентами.

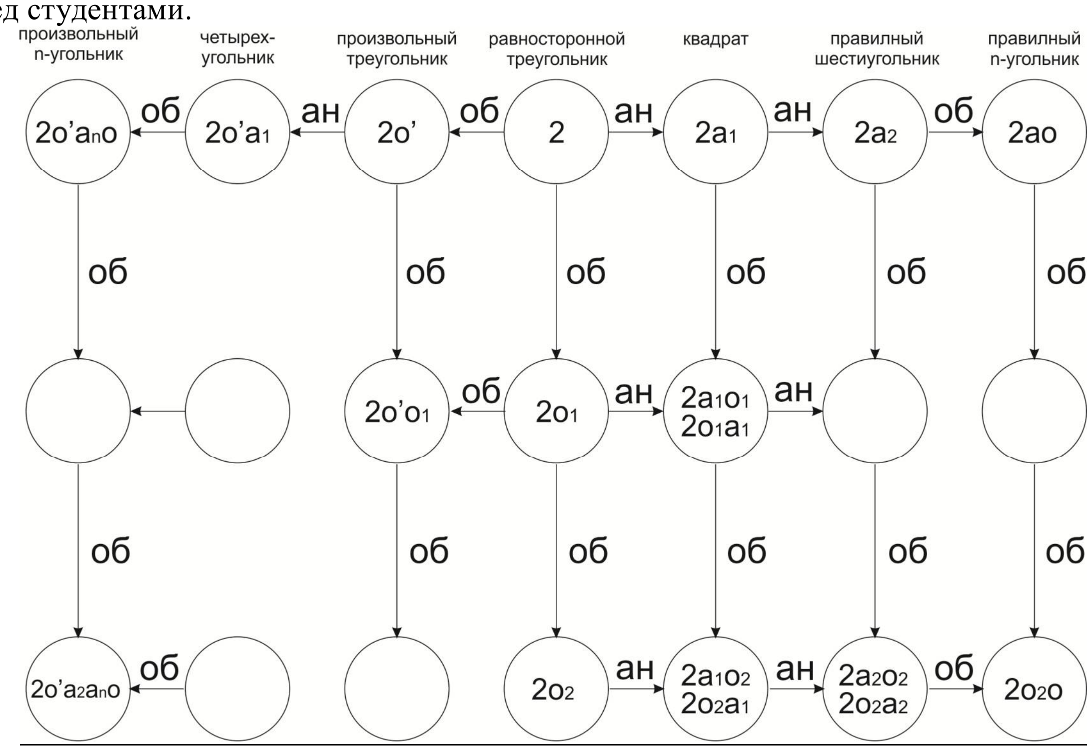

Рис. 2

Таким образом, если все это обобщим в зависимости от числа (количества) сторон правильного многоугольника, получаются новые обобщенные задачи. Например, на последнем месте в этой схеме будет Задача 2о$_2$а$_n$о.

Задача 2о$_2$а$_n$о. Доказать, что для каждого правильного *n*-угольника и любой точки *P* на его плоскости сумма ориентированных расстояний от точки *P* до его сторон равна *n.r*, где *n* – число его сторон, а *r* – радиус вписанной окружности.

Так как все указанные задачи последнего ряда на схеме 2 являются обобщениями предыдущих задач, находящихся по каждой вертикальной линии схемы, в зависимости от местоположении точки *P*, а все задачи последней (правой) вертикали являются обобщениями предыдущих задач, номер которых расставлен по горизонталной линии – согласно количеству сторон многоугольника, то Задача 2**о$_2$а$_n$о** является обобщением всех указанных обобщений. Иными словами эту задачу можно рассматривать как обобщение всех предыдущих обобщений. Поэтому на схеме она обозначена через **2о$_2$о**.

Дальше попытаемся сделать обобщение Задачи **2** в зависимости от вида данного многоугольника. Ставим вопросы: «Почему треугольник должен быть правильным? Что будет, если он произвольный?». Так как в произвольном треугольнике высоты к трем сторонам не равни, то приходится дать новую редакцию искомого равенства, которое мы должны доказать. Для этой цели равенство в базисной **Задаче 2** представим следующим образом $\frac{d_1}{h}+\frac{d_2}{h}+\frac{d_3}{h}=1$.

Тогда можем сформулировать следующую задачу.

Задача 2о·. Если треугольник ABC произвольный и P – произвольная внутренняя точка в треугольнике, то сумма отношений $\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}=1$, где d_i – расстояния от точки P до сторон треугольника, а h_i – соответствующие высоты к этим сторонам.

Дальше исследования можно продолжить в двух направлениях – по вертикальным и по горизонтальным линиям на рисунке 2:

а) по вертикальным – обобщения в зависимости от местоположения точки P;

б) по горизонтальным – согласно числу сторон многоугольника.

И наконец сформулируем еще одно обобщение обобщений.

Задача 2о·о₂аₙо. Для каждого выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и любой точки P его плоскости сумма отношений $\frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\cdots+\frac{S_n}{S}=1$, где S – площадь n-угольника, а S_1, S_2, …, S_n – ориентированные площади треугольников A_1PA_2, A_2PA_3, ….., A_nPA_1.

Как видно из этих примеров, метод ***обобщения*** можно применять для формулирования новых, более общих задач, исходя из данной конкретной базисной задачи.

В учебной практике, учитывая большую абстракцию некоторой данной общей задачи и с целью повышения доступности, приходится составлять новые задачи методом ***специализации***. В таком случае специализация рассматривается как процесс, обратным обобщению. Например, если в качестве базисной задачи принять Задачу 2о$_2$, то с помощью специализации от ней можно сформулировать задачу 2о$_1$ и задачу 2. Этим способом можно поступить и с какой-нибудь из задач последнего ряда модели.

Иногда возникает потребность составления некототых задач потому, что субекту (студенту, учителю, ученику) неизвестен способ для решения данной общей задачи. В таких случаях очень полезным оказывается рассмотрение конкретных частных ситуаций, т.е. формулирование новых задач посредством метода ***конкретизации***. Рассмотрим два примера.

Пусть дана следующая общая задача.

Задача 3. В произвольном треугольнике ABC отмечена произвольная точка M (внутреная или на контуре). Если $AM\cap BC=A_1$, $BM\cap AC=B_1$, $CM\cap AB=C_1$, найти сумму $\sum=\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}$.

Сам факт, что надо решить Задачу 3 при произвольном положении точки M, подсказывает нам, что целесообразно рассмотреть некоторые подходящие частные случаи, которые дали бы идею для решения данной общей задачи. Совсем естественно заметить, что одно подходящее положение точки M – это медицентр треугольника, так как в этом случае известны все отношения искомой суммы.

Задача 3к₁. Если M – медицентр произвольного треугольника ABC и $AM\cap BC=A_1$, $BM\cap AC=B_1$, $CM\cap AB=C_1$, то сумма отношений $\frac{MA_1}{AA_1}$, $\frac{MB_1}{BB_1}$ и $\frac{MC_1}{CC_1}$ есть константа. Очевидно, что в этом рассматриваемом случае эта константа равняется 1.

Так как в условии базисной задачи 3 указано, что точка M может быть на контуре, то возможно сформулировать еще две конкретные задачи.

Задача 3к₂. Пусть ABC треугольник и M – произвольная точка стороны BC. Тогда $AM\cap BC=A_1\equiv M$, $BM\cap AC=B_1\equiv C$, $CM\cap AB=C_1\equiv B$. Найти сумму $\sum=\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}$.

Ясно, что в этом случае имеем $\sum=0+\frac{MC}{BC}+\frac{MB}{CB}$.

Задача 3к₃. Если точка $M\equiv C$ и C_1 – произвольная точка стороны AB, то искомая сумма в задаче **3** опять равна 1.

Результат, который получается в этих трех конкретных случаях, подсказывает идею: переформулировать общую базисную задачу **3** в задачу на доказательстве, а именно: доказать, что вопросная сумма есть константа, равна 1.

Доказательство этой общей задачи основывается на идеи заменить вопросные отношения отрезков посредством подходящих отношений площади треугольников. Действительно, так как отрезками А*M*, *BM* и *CM* данный треугольник разчленяется на три треугольника, сумма площади которых равна площади *S* данного треугольника, то такой «подходящей суммой « является следующая сумма: $\frac{S_{AMB}}{S}+\frac{S_{BMC}}{S}+\frac{S_{AMC}}{S}$.

Связи между этими четырмя задачами можно онагледеть следующей моделью (рис. 3):

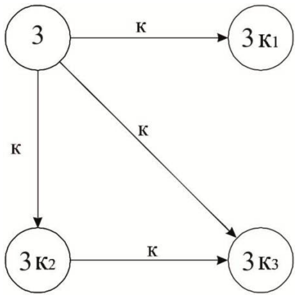

Рис. 3

Если в этой модели все стрелки направить в обратную сторону, получится, что задача **3к₂** является обобщением задачи **3к₃**, а задача **3** – обобщением всех остальных.

Задача 4. Через центр О правильного треугольника *ABC* построена произвольная прямая ***p***. Если $|AA_1|$, $|BB_1|$ и $|CC_1|$ – расстояния соответственно от точек *A*, *B* и *C* до прямой ***p***, доказать, что сумма $AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2$ является константой и выразить ее посредством некоторых элементов треугольника.

Так как правильный треугольник определяется однозначно одним линейным элементом (параметром), а произвольная прямая ***p***, проходящяя через его центр *O* (зафиксированная точка) – одним нелинейным элементом, то всего два параметра определяют данную составную фигуру до реляции конгруэнтности (однозначно).

Для треугольника *ABC* определяющим параметром может быть любой его линейный элемент (основной или второстепенний), а для произвольно крутящейся прямой ***p***, проходящей через постоянную точку *O*, – подходящий угол, который ***p*** образует с выбранным линейным элементом треугольника. Сам факт, что прямая ***p*** может занимать произвольное положение по отношению сторон и вершин правильного треугольника, причем всегда проходя через точку *O*, подсказывает, что целесообразно рассмотреть частные случаи. Есть два таких случая – прямая ***p*** проходит через вершину треугольника или ***p*** параллельна некоторой его стороны. Таким образом, с помощью метода ***конкретизации*** положения, которое может занять прямая ***p***, приступаем к формулировке следующих двух задач.

Задача 4к₁. Если треугольник *ABC* правильный с центром *O* и прямая ***p*** проходит через точки *O* и *A*, доказать, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ и $AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2$ – константа, где A_1, B_1, C_1 – ортогональные проекции точек *A*, *B*, *C* на прямой ***p***.

Так как $A\in p$ и $AO\perp BC$, то $A_1\equiv A$, $B_1\equiv C_1$ – середина *BC*. Тогда векторное равенство очевидно выполнено, а искомая сумма равна $\frac{1}{2}a^2$, где ***a*** – длина стороны треугольника.

Задача 4к₂. Если треугольник *ABC* правильный с центром *O* и прямая ***p*** проходит через точку *O* и параллельна стороне *AB*, то доказать, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ и сумма $\Sigma=AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2=const$, где A_1, B_1, C_1 – ортогональные проекции точек *A*, *B*, *C* на прямой ***p***.

Ибо $\boldsymbol{p} \| AB$, то $C_1 \equiv O$, т.е. $CC_1 = CO = \frac{2}{3}h = R = 2r$, а $AA_1 = BB_1 = r = \frac{R}{2} = \frac{1}{3}h$. Тогда, в зависимости от выбора линейного параметра (h, r, R), для искомой суммы получаются следующие результаты: $\sum = \frac{2}{3}h^2, \sum = 6r^2, \sum = \frac{3}{2}R^2$.

Если сравним эти результаты с результом в задаче **4к$_1$**, имея ввиду зависимости, которые существуют между элементами a, h, r, R правильного треугольника, заметим, что все полученные результати равны между собою, т.е., что рассматриваемая сума константа, принимающая одно и тоже значение и в двух частных случаях. Этот факт подсказывает предположение, что и при произвольном положени прямой $\boldsymbol{p}$ искомая сумма будет иметь тоже самое значение. Остается еще проблема – «какой линейный параметр треугольника и какой параметр для прямой $\boldsymbol{p}$ являются самымии подходящими для параметризации составной фигуры в общей ситуации в задаче **4**?». Опыт показывает, что если выберем сторону $\boldsymbol{a}$ треугольника и угол, который образует с ней прямая $\boldsymbol{p}$, то вопросные расстояния выражаются через переменные отрезки, что неудачно. Если же выберем в качестве параметров радиус R описанной около данного треугольника окружности и угол α, который данная прямая $\boldsymbol{p}$ образует с одним фиксированным радиусом (например OA), то легко находим, что $AA_1 = R.sin\alpha$, $BB_1 = R.\sin(60^0 - \alpha)$, $CC_1 = R.\sin(60^0 + \alpha)$, а отсюда и окончательный результат: $\sum = \frac{3}{2}R^2 = const$.

Отметим еще, что из общей задачи **4**, посредством варирования заключения, можно составить новые задачи, связанные с установлением других констант или с доказательством новых зависимостей. Например:

Задача 4.1. Дан правильный треугольник ABC с центром O и произвольная прямая $\boldsymbol{p}$, проходящая через O. Если точки A и B лежат в одной и той же полуплоскости относительно $\boldsymbol{p}$, а точка C – в другой полуплоскости, доказать, что:

а) $|AA_1| + |BB_1| = |CC_1|$;

б) суммы $AA_1^2 + AA_1.BB_1 + BB_1^2$, $AA_1^2 - AA_1.CC_1 + CC_1^2$ и $BB_1^2 - BB_1.CC_1 + CC_1^2$ являются константами.

Утверждение в подусловии а) задачи **4.1.** впрочем совпадает с эквивалентным ему утверждением в уже рассмотренной задаче **1а$_1$**., где треугольник ABC – произвольный.

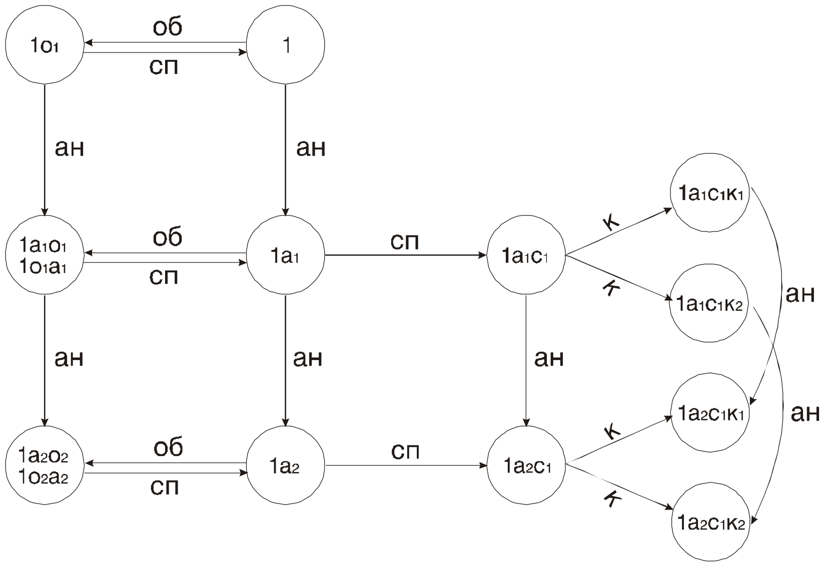

Рис. 4

Связь между последней задачей **4.1*а*)** и задачей **1а$_1$**., составленной методом аналогии в начале статьи, возможно рассматривать в следующем аспекте: можно считать, что **Задача 4.1а)**, относящаяся о правильном треугольнике, получается от **Задачи 1а$_1$**

посредством метода *специализации*. Аналогичным путем можно выявить связь и между **Задачей 4** и **Задачей 1а$_1$**, если последней дадим подходящую формулировку, т.е. **Задачу 4** тоже можно рассматривать, как полученную посредством специализации от **Задачи 1а$_1$**. Тем же способом из задачи **1а$_2$** посредством метода специализации можно сформулировать задачу о правильном тетраэдре, которая со своей стороны будет являться аналогичной задаче **4** о правильном треугольнике. Изходя из задачи о правильном тетраэдре, через центр которого проходит произвольная плоскость α и для которого требуется доказать, что сумма квадратов расстояний от его вершин до этой плоскости есть константа, можно получить посредством метода ***конкретизации*** новые задачи. Для этой цели нужно рассмотреть различные частные положения плоскости по отношению к ребрам или стенам тетраэдра – когда плоскость α проходит через медицентр тетраэдра и одно его ребро или α параллельна одной граньи тетраэдра. Здесь мы не будем формулировать подробно каждую из упомянутых задач о тетраэдре, но укажем только то, что связи между этими задачами и задачами, полученными различными методами от **базовых задач 1** и **4**, представлены на схеме 4, которая является развитием схемы 1. В обозначениях на схеме 4, по сути дела, 1а$_1$с$_1$ – это задача 4, 1а$_1$с$_1$к$_1$ – задача 4к$_1$, 1а$_1$с$_1$к$_2$ – задача 4к$_2$, а 1а$_2$с$_1$, 1а$_2$с$_1$к$_1$ и 1а$_2$с$_1$к$_2$ – упомянутые выше задачи о правильном тетраэдре и различные положения плоскости α.

Выводы. В заключение укажем, что представленные модели, с одной стороны служат для наглядности процессов применения аналогии, обобщения, специализации и конкретизации к составлению задач и для выявления связи между базисной задачей и новосоставленными задачами, а также и между собою, а с другой стороны, дают возможност ставить перед студентами проблем – открыват новые задачи (не только формулировать, но и обосновыват их). Таким образом осуществляется в большей степень творческая математическая деятельность со стороны студентов.

Отметим еще, что наши исследования показывают, что студенты проявляют очень большой интерес к процессу составления задач на занятиях нашего спецкурса. Более того – они сами хотят составлять задачи больше, чем решать задачу, которая сформулирована другим автором.

Благодарности. Исследования сделаны с финансовым содействием фонда «Научные исследования» к НПД при ПУ «Паисий Хилендарски». Договор проекта: ФП17-ФМИ-008.

Список использованной литературы.

1. Столяр А. А. Педагогика на математиката. – София: ДИ «Народна просвета». – 1976. – 408 с.
2. Пойа, Д. Как да се решава задача. – София: «Народна просвета». – 1972. – 132 с.
3. Туманов, С. И. Поиски решения задач. – М.: «Просвещение». – 1979. – 279 с.
4. Фридман, Л. М., Е. Н. Турецкий. Как научится решать задачи. – М.:»Просвещение». – 1984. – 175 с.
5. Болтянский, В. Г., Я. И. Груденов. Как учить поиску решения задач. // Математика в школе. – 1988. – № 1 – С. 8-14.
6. Василевский, А. Б. Обучение решению задач по математике. – Минск: «Выш. школа». – 1988. – 255 с.
7. Шарыгин, И. Учимся решать задачи по геометрии. // Математика в школе. – 1989. – № 2. – С. 87-101.
8. Методи за решаване на задачи (от училищния курс по математика). Част I, Под научната редакция на В. Милушев. – Пловдив: Изд. «Макрос». – 2001. – 227 с.
9. Петров, П. Д. Формиране на умения за решаване на задачи от училищния курс по математика. (теоретико-приложни аспекти). – Стара Загора: Кота. – 2003. – 120 с.
10. Френкев, Д. Г., В. Б. Милушев, Д. В. Бойкина. Комплексен модел на процеса решаване на математически задачи от определен вид. // В: «Математика и математическо образование». – София: Изд. на БАН. – 2007. – С. 429-435.
11. Бойкина, Д., В. Милушев, Р. Маврова. За дейността решаване на задачи от една математическа област с оператор, съдържащ знания от друга математическа област. // MATTEX 2010, Сборник научни трудове, посветен на 130-годишнината от рождението на академик Кирил Попов, – Том 1. – Шумен: Унив. изд. «Епископ Константин Преславски». – 2010. – С. 293-300. ISSN 1314-3921

12. Бойкина, Д., В. Милушев. Приложение на един комплексен модел за решаване на задачи от функции чрез използване на знания по геометрия. // «Математика и математическо образование» – 40-та Юбилейна Пролетна конференция на СМБ. – София – БАН, – 2011. – С.367-373. ISSN 1313-3330
13. Милушев, В., Д. Бойкина. О методике решения задач школьного курса математики. // Вісник Черкаського унверситету імені Богдана Хмельницького, Серія Педагогічні науки. – Випуск № 8 (261). – Черкаси. – 2013. – С. 95-107. ISSN 2076-586X
14. Милушева-Бойкина, Д.В., В.Б. Милушев. Формиране на умения за прилагане на анализ и синтез при решаване на задачи по геометрия. – В журнала: Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. – III(26), Issue: 50, 2015. – P. 50–54. p-ISSN 2308-5258, e-ISSN 2308-1996. (http://www.seanewdim.com/)
15. Гроздев, С. Организация и самоорганизация при решаване на задачи. // Математика и информатика. – 2002. – кн. 6. – С. 51-58.
16. Milloushev, V., D. Boykina. On the Mastering of Knowledge and Skills for Solving Mathematical Problems in the Context of the Relationship «Reflection – Synergy». // In: «Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications». – Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA'2010, 40th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University «Paisiy Hilendarski», 10-12 December 2010. – Plovdiv, Bulgaria, PP. 377-384. ISBN 978-9963-9277-9-1
17. Милушева-Бойкина, Д, В. Милушев. Относно използването на методи и евристики при решаване на задачи от позициите на рефлексивно-синергетичния подход. – В журнала: Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. – II(14), Issue: 27, 2014. – Vol. 6. – P. 52-56. p-ISSN 2308-5258, e-ISSN 2308-1996. (www.scaspee.com)
18. Millousheva-Boikina, D., V. Milloushev. Methodology for Mastering Methods of Solving Mathematical Problems. In: Conceptual Framework for Improving the Mathematical Training of Young People: Monograph, Edited by prof. N. Tarasenkova. In L. Kyba (A. Ed.). Budapest, Hungary: SCASPEE. – 2016. – 212 p., PP. 31–79. ISBN: 978-963-12-7666-4. (http://seanewdim.com/other-publications.html)
19. Килпатрик, Дж. От къде идват хубавите задачи? // Обучението по математика и информатика. – 1993. – № 5. – С. 2-13.
20. Шаригин, И. Как се раждат задачите. // Обучението по математика и информатика. – 1992. – № 5. – С. 7 – 12; – № 6. – С. 7-14.
21. Милушева-Бойкина, Д. В. Дейността съставяне на задачи и обучаване студентите на някои методи за съставяне на задачи от училищния курс по математика. /Автореферат на дисертация за присъждане на образователната и научна степен «доктор»/. – София. – 2000.
22. Милушева-Бойкина, Д., В. Милушев. Дейността «съставяне» на математически задачи. // Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. – 2013. – Vol. 5. – P. 23-28. p-ISSN 2308-5258, e-ISSN 2308-1996. (www.scaspee.com)
23. Милушева-Бойкина, Д., В. Милушев. Изследване на дейността съставяне на учебни математически задачи. // В журнала: Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. – II(9), Issue: 19, 2014. – Vol. 1. – P. 81-85. p-ISSN 2308-5258, e-ISSN 2308-1996. (www.scaspee.com)
24. Милушев, В., Д. Бойкина. Триединство деятельностей «решение», «составление» и «преобразование» математических задач. // Вісник Черкаського унверситету імені Богдана Хмельницького, Серія Педагогічні науки. – Випуск 201, Частина II. – Черкаси. – 2011. – С. 63-70. ISSN 2076-586X
25. Милушев, В., Д. Бойкина. Теоретические основы конструирования дидактических систем учебных математических задач. // Вісник Черкаського унверситету імені Богдана Хмельницького, Серія Педагогічні науки. – Випуск № 36 (249). – Черкаси. 2012, – С. 64-72. ISSN 2076-586X
26. Бойкіна, Д. В. Складання математичних задач методом «звернення». // Науковий журнал: Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. – №2 (28), – Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, – 2013. – С. 27-36. УДК 372. 851.

References.

1. Stolyar, A.A. (1976). *The pedagogy of mathematics.* Sofia, Bulgaria: Narodna prosveta. [In Bul.]
2. Poya, D. (1972). *How to solve a problem*. Sofia, Bulgaria: Narodna prosveta. [In Bul.]
3. Tumanov, S. I. (1979). *Looking for solutions of problems*. Moscow, Russia: Prosveshtenie. [In Russ.]
4. Fridman, L. M. & Turetskii, E. N. (1984). *How to learn to solve problems.* Moscow, Russia: Prosveshtenie. [In Russ.]
5. Boltyanskii, V.G. & Grudenov, Y.I. (1988). How to learn to look for solutions of problems. In: *Mathematics in school,* (1), (pp. 8-14). [In Rus.]
6. Vasilevskii, A.B. (1988). *Trainging in solving problems in mathematics*. Minsk, Belarus: Visheishaya shkola. [In Rus.]
7. Sharigin, I. F. (1989). We are learning to solve geometry problems. In: *Mathematics in school,* (2), (pp. 87-101). [In Rus.]

8. Milloushev, V. et al. (2001). *Methods for solving problems (from the school course in mathematics). Part I.* Under the scientific editing of the V. Milloushev. Plovdiv, Bulgaria: Makros. [In Bul.]
9. Petrov, P. D. (2003) *Forming skills for solving problems of the school course in mathematics. (theoretically-applied aspects).* Stara Zagora, Bulgaria: Kota. [In Bul.]
10. Frenkev, D. G., Milloushev, V. B., & Boykina, D. V. (2007). A complex model of the process of solving mathematical problems of a certain type. In: *Mathematics and Mathematical Education,* (pp. 429-435). Sofia, Bulgaria: BAS. [In Bul.]
11. Boykina, D., Milloushev, V. & Mavrova R. (2010). About the activity of problem solving from one mathematical field using an operator which contains knowledge from another mathematical field. In: *MATTEH 2010*, *Collection* of *Scientific Papers, dedicated to 130 years from the birth of academician Kiril Popov*, vol. 1. (pp. 293-300). Shumen, Bulgaria: University press «Episkop Konstantin Preslavski». [In Bul.]
12. Boykina, D. & Milloushev, V. (2011). An application of one complex model for solving problems of functions by using geometry knowledge. In: *Mathematics and mathematical education – 40-th Anniversary Spring Conference of UBM*. (pp. 367-373). Sofia, Bulgaria: BAS. [In Bul.]
13. Milloushev, V. & Boykina, D. (2013). About the methodology of solving problems from the school course in mathematics. In*: Newsletter of the Cherkasy University named after Bogdan Khmelnitsky, Pedagogical sciences.* vol. 8. (pp. 95-107). Cherkasy, Ukraine. [In Russ.]
14. Millousheva-Boykina, D. & Milloushev, V. (2015). Forming skills for the application of analysis and synthesis in solving geometry problems. In: *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*. III(26), Issue: 50, (pp. 50-54). (http://www.seanewdim.com/). [In Bul.]
15. Grozdev, S. (2002). Organization and self-organization in solving problems. In: *Mathematics and informatics*, (6), (pp. 51-58). Sofia, Bulgaria. [In Bul.]
16. Milloushev, V. & Boykina, D. (2010). On the Mastering of Knowledge and Skills for Solving Mathematical Problems in the Context of the Relationship «Reflection – Synergy». In: *«Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications». – Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA'2010, 40th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University «Paisiy Hilendarski»*, 10-12 December 2010. (pp. 377-384). Plovdiv, Bulgaria. [In Eng.]
17. Millousheva-Boykina, D. & Milloushev, V. (2014). About using methods and heuristics in solving problems from the perspective of reflexive-synergetic approach. In: *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*. II(14), Issue: 27, vol. 6. (pp. 52-56). (www.scaspee.com). [In Bul.]
18. Millousheva-Boikina, D. & Milloushev, V. (2016). Methodology for mastering methods of solving mathematical problems. In: *Conceptual Framework for Improving the Mathematical Training of Young People: Monograph, Edited by prof. N. Tarasenkova.* In L. Kyba (A. Ed.). (pp. 31-79). Budapest, Hungary: SCASPEE. (http://seanewdim.com/other-publications.html). [In Eng.]
19. Kilpatrick, J. (1993). Where do good problems come from? In: *The teaching of mathematics and informatics.* vol. 5. (pp. 2-13). Sofia, Bulgaria. [In Bul.]
20. Sharigin, I. F. (1992). How the problems are born. In: *The teaching of mathematics and informatics.* vol. 5. (pp. 7-12) & vol. 6. (pp. 7-14). Sofia, Bulgaria. [In Bul.]
21. Millousheva-Boykina, D. (2000). *The activity of creating problems and teaching students some methods for creating problems from the school course in mathematics*. Abstract of a dissertation for awarding the educational and scientific degree «doctor». Sofia, Bulgaria. [In Bul.]
22. Millousheva-Boykina, D. & Milloushev, V. (2013). The activity of «creating» mathematical problems. In: *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*. vol. 5. (pp. 23-28). (www.scaspee.com). [In Bul.]
23. Millousheva-Boykina, D. & Milloushev, V. (2014). Investigation of the activity of «creating» school mathematical problems. In: *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*. II(9), Issue: 19, vol. 1. (pp. 81-85). (www.scaspee.com). [In Bul.]
24. Milloushev, V. & Boykina, D. (2011). The triad of activities «solving», «creating» and «transforming» mathematical problems. In*: Newsletter of the Cherkasy University named after Bogdan Khmelnitsky, Pedagogical sciences.* vol. 201, part II. (pp. 63-70). Cherkasy, Ukraine. [In Russ.]
25. Milloushev, V. & Boykina, D. (2012). Theoretical bases of the construction of didactic systems of school mathematical problems. In*: Newsletter of the Cherkasy University named after Bogdan Khmelnitsky, Pedagogical sciences.* vol. 36 (249). (pp. 64-72). Cherkasy, Ukraine. [In Russ.]
26. Boykina, D. V. (2013). Creating mathematical problems using the «reversal» method. In: *Scientific Journal: Pedagogical sciences: theory, history, innovative technologies.* vol. 2 (28). (pp. 27-36). Sumi, Ukraine: Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko. [In Russ.]

MILLOUSHEVA-BOYKINA D.,
Doctor PhD, Associate Professor, Faculty of mathematics and informatics, Plovdiv University «Paisii Hilendarski», Bulgary.
MILLOUSHEV V.,
Doctor of Science (Pedagogical Sciences), Professor, Faculty of mathematics and informatics, Plovdiv University «Paisii Hilendarski», Bulgary.

METHODOLOGY AND METHODS FOR CREATING MATHEMATICS PROBLEMS FOR SECONDARY SHOOL.

Abstract. Introduction. *It is well known that the process of solving heuristic mathematical problems of non-algorithmic type is a creative activity in which not only mathematical knowledge is applied but also intuition and imagination. Of course, creativity is more prominent in the process of creating problems, since this activity requires not only deep knowledge of mathematical objects, but also a deeper understanding of the structure of the problems and revealing the mathematical abilities of the subject.*

Purpose. *The aim of the article is to present certain basic problems and methodology of applying the methods of analogy, generalization, specialization and concretization in creating mathematical problems for the secondary school. The application of these methods is illustrated with series of problems created from a given basic one, revealing the relations between the created problems considered as a system.*

Methods. *Theoretical analyses of the activity «creating» problems and experimental application of the methods analogy, generalization, specialization and concretization in practice.*

Results. *The actuality of carrying out the activity of creating problems for the school course of mathematics is motivated in the article. A certain methodology for creating problems by the methods of analogy, generalization, specialization, concretization is presented. In order to realize this methodology the learner first have to make an analysis of the formulation of a certain problem from the school course of mathematics, which we call «a basic problem». Sometimes the formulation of the basic problem is not suitable for making a generalization. In such cases, on the base of the analysis that we have made, we make a new formulation of the problem which is better for generalization. Usually in each problem there are given some restrictions about some of the objects in it or there are constants. In such cases generalization can be made in the following ways: a) by removing a given restriction; b) by replacing of a constant with a parameter; c) combining a) and b).*

*For convenience in the paper we indicate the basic problems in the following way: Problem 1, Problem2, …, while the problems that are created from the basic Problem 1 using analogy – with Problem 1*a_1*, Problem 1*a_2*, …; and the problems that are created by generalization by removing a certain restriction or by replacing of a constant with a parameter we indicated as: Problem 1*o_1*, Problem 1*o_2*, … If we remove another restriction, the certain generalized problems received from Problem 1*a_1*, we indicate with: Problem 1*a_1o_1*, Problem 1*a_1o_2 *and so on. Schematic models of the relations between the created problems, which are considered as a system, are presented.*

Originality. *Teaching students to solve problems from the school course in mathematics is a popular in the curricular. But the question about teaching students – future teachers in mathematics in creating problems is not developed enough. That's why we have created a special course for our university students named «Methods and methodology for creating problems» which gives students practical skills for creating and solving problems. This leads to improvement the quality of their professional training as future teachers in mathematics.*

Conclusion. *As a conclusion we shall point that the presented models serve to illustrate the processes of applying the methods of analogy, generalization, specialization, concretization for creating problems and to reveal the relations between the basic problem and the created ones as well as between the created problems themselves. On the other hand this process gives the opportunity to put different problems in front of the students – such as to find out new problems, which they have to formulate and justify. Thus, creative mathematical activity on the part of the students takes place.*

Keywords: *problem, methodology, methods for creating problems, analogy, generalization, specialization, concretization.*

Одержано редакцією 15.11.2017 р.
Прийнято до публікації 04.12.2017 р.