УДК 372.851

МИКАЕЛЯН Гамлет Суренович,
доктор педагогических наук, кандидат физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математики и методики ее преподавания,
Армянский государственный педагогический институт имени Х. Абовяна, Республика Армения
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

МОТИВАЦИОННЫЕ ПРИЗНАКИ НАУЧНОГО ПРЕКРАСНОГО В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

В работах [5–7] *мы рассмотрели объективные признаки научной или математической эстетики (научного или математического прекрасного), признаки, которые относятся к объектам тех или иных сфер науки. Проявление эстетического начала обусловлено также умственными, интеллектуальными способностями субъекта, осуществляющего научную деятельность. Следовательно, часть признаков научной эстетики относится к субъекту. Такими признаками являются любознательность, гибкость и скорость ума и т.д. Частью научной эстетики являются также те признаки, которые проявляются в процессе двустороннего взаимодействия объекта и субъекта и проявляют ту или иную сторону психики субъекта: познание, деятельность и т.д. Такими являются, например, неожиданность, которая выражает ожидания субъекта в процессе взаимодействия с научным объектом, полезность, которая выражает важность научного объекта для субъекта и т.д. Все это мы называем субъективными признаками научной эстетики (научного прекрасного). Субъективные признаки научной эстетики мы также разделяем на три группы. В первую группу мы включаем те признаки, которые относятся к мотивации деятельности субъекта. Назовем их мотивационными признаками. Это полезность, неожиданность, непредсказуемость, целенаправленное преодоление сложных и трудных препятствий и т.д. Во вторую группу включены те признаки, которые относятся к процессу познания, его природе, сущности. Назовем их познавательными признаками. В познавательные признаки научной эстетики мы включаем интеллектуальный поиск, нахождение, открытие, познание, понимание сущности предмета,* *знание неявной истины и т.д. В третью группу субъективных признаков мы включаем те признаки, которые относятся к психике осуществляющего деятельность субъекта. Назовем их психическими признаками научного прекрасного. К психическим признакам научного прекрасного мы относим наличие положительных признаков мысли, воображения, памяти, способности, воли (проницательность, скорость, гибкость мысли, устойчивость внимания, целенаправленность, сила воли и т.д.). В данной работе мы рассмотрим мотивационную группу субъективных признаков математического прекрасного. Мотивационные признаки научного прекрасного рассматривались множеством исследователей. Роли эстетики в вопросе мотивации в процессе обучения математике придают особую важность М.А. Родионов* [9] *и Г.И. Саранцев* [10].

Ключевые слова: *эстетика математики; признаки математического прекрасного; субъективные признаки; мотивационные признаки; полезность; неожиданность; непредсказуемость; целенаправленное преодоление сложных и трудных препятствий.*

Целенаправленное преодолевание сложных и трудных препятствий, достижение цели. Математическая деятельность, начиная с обучения курсам общеобразовательной и высшей школи до осуществления математических открытий, является целенаправленным процессом преодолевания сложных, трудных и целенаправленных препятствий. Для достижения уровня осуществления математических открытий, математическая деятельность требует от исследователя упорной и последовательной работы для преодоления сложного и трудного материала, для усвоения соответствующих положений теории. И каждая математическая теория представляет собой своеобразную архитектурную конструкцию, наличествующие взаимоотношения между элементами которой обладают не только особенной красотой, но и намечают последующий процесс этих взаимоотношений, и ведут истинную мысль и душу к познанию. И такое преодолевание сложных и трудных препятствий придает знанию некую эстетическую привлекательность.

Вся данная деятельность позволяет сопровождать знание математического материала познанием красоты его архитектурного строения, а последнюю цель – осуществление математического открытия – сопровождает чувством прекрасного. Именно это имеет в виду Дж. фон Нейман, когда находит, что математика в основном развивается благодаря эстетическим мотивам.

Эстетический признак целенаправленного преодолевания сложных и трудных препятствий широко проявляется как в чисто математической деятельности, так и в процессе обучения математике. Однако эти два процесса отличаются друг от друга своими целями, а также способами реализации. Если в первом целью является изучение профессионального математического материала и получение новых результатов на его основе, то во втором реализуются чисто образовательные цели, и математический материал служит как способ реализации этих задач.

Что касается форм реализации деятельности, то математик, специалист реализует свою деятельность уединенно, он выдвигает цель, гипотезу, намечает задачи, а также стоящие на пути к их решению препятствия, на преодолевания которых и направляет свои усилия.

Иная картина в математическом образовании. Здесь, несмотря на то, что препятствия более ясные и простые, не особо велики и способности одолевающих эти препятствия. К тому же, предлагаемые препятствия ученики преодолевают одновременно и вместе, но обладают совершенно разными способностями к преодолению. И данный процесс преодоления выдвигает разнообразные психолого-педагогические задачи, решение которых требует уже от учителя приложения серьезных усилий.

Если учитель ставит перед всеми учениками одни и те же математические задачи, то, естественно, их существенная часть не способна преодолеть возникшие препятствия, отчаивается и остается вне процесса обучения. Эстетический признак преодоления сложных и трудных препятствий превращается в антиэстетический и непедагогический подход. Для избежания такого положения дел в первую очередь следует учитывать способности учащегося.

С другой стороны, математические учебники должны содержать задачи, соответствующие различным требованиям и уровням сложности. Необходимо учитывать, что удачное решение даже простой математической задачи (преодоление простого препятствия) для слабого ученика представляет собой преодоление сложного препятствия и может воодушевить его, втянуть в образовательный процесс.

Доказательство математической теоремы, решение задачи представляют собой некие целенаправленные процессы, зачастую предполагающие реализацию сложных и трудных действий. И, следовательно, обучение им должно сопровождаться с некой эстетической привлекательностью. Рассмотрим, к примеру, следующую задачу.

Мы имеем два сплава, содержащие соответственно p_1 и p_2 процента золота. Каким образом мы сможем получить из них сплав в количестве m, содержащий p процентов золота?

Исходя из общей эстетики алгебраического подхода, которая вытекает из принципа единства многообразий, предположим, что мы взяли из первого сплава некое количество x, а из второго сплава – некое количество y. Казалось бы, следующий шаг: $x + y = m$, не представляется сложным, однако, стоит отметить, что так же, как поднимаясь в гору нельзя двигаться все время по подъему, так и процесс обучения нельзя сводить только к преодолению сложных и трудных препятствий. Их нужно перемещать с простыми шагами, что, во-первых, релаксирует ум, и далее полученный положительный результат увеличивает надежду достичь окончательной цели. Творческая часть решения задачи, которая является результатом интеллектуального поиска, в данном случае представляет собой то, что количество золота в общем сплаве такое же, как и в обоих сплавах, взятых вместе. Что это значит с алгебраической точки зрения? И именно здесь мы встречаем наше основное препятствие. Для его преодоления нам необходимо найти количество золота в первом и втором сплавах, а также количество золота в их смеси, и воспользоваться результатом нашего интеллектуального поиска – сумма первых двух должна быть равна третьему. Первые три шага требуют от нас способности посчитать процент, а последний – знания объединяющей модели операции сложения. Таким образом, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{xp_1}{100} + \frac{yp_2}{100} = \frac{mp}{100}, x + y = m, \tag{1}$$

Здесь для того, чтобы довести дело до конца, мы должны обладать специальным математическим навыком. В конце концов мы получим:

$$x = m\frac{p-p_2}{p_1-p_2},\ y = m\frac{p-p_1}{p_2-p_1} \tag{2}$$

Казалось бы, мы решили поставленную перед нами задачу, преодолев сложное и трудное препятствие, целенаправленно дошли до цели. Обычный ученик удовлетворится полученным ответом и остановится на этом месте. Но пытливый, склонный к поиску ум продолжит исследовательские работы и попытается выяснить, каким образом взаимодействует p с p_1 и p_2. Естественно, что поиск ответа на данный вопрос представляет собой эстетическую деятельность в качестве интеллектуального поиска, к привлекательности которой добавляется еще и эстетическая привлекательность преодоления сложного препятствия на пути к решению задачи.

Еще в самом начале мы обязаны были рассмотреть вопрос взаимосвязи p_1 и p_2 и исключить случай $p_1=p_2$, так как при решении системы (1) мы произвели деление на разность $p_1–p_2$ и получили ее в знаменателях ответов (2). И вот мы видим еще одну тонкость: как нам поступить в случае $p_1=p_2$? Однако это не представляет особо сложного препятствия на нашем пути и преодолевается без особого труда: в этом случае процент золота останется неизменным в объединении любого количества двух сплавов. Следовательно, задача в этом случае получит положительное решение, если $p = p_1 = p_2$.

Таким образом, мы можем предположить, что $p_1 \neq p_2$, и считать, что, например, $p_1 > p_2$. Таким образом, из решения (2), проявив не самые сложные математические навыки, мы получим $p_1 > p > p_2$. То есть, изначально в условии нашей задачи должно было быть дано, что процентное содержание золота в новом сплаве, полученном из смеси двух сплавов, находилось между процентными содержаниями двух сплавов.

Казалось бы, вот мы и завершили решение задачи. Однако пытливый ум всегда находит новые пути к исследованию. Также и в этом случае. Появляется, к примеру, вопрос о том, какой из сплавов мы должны взять в большем количестве для получения p процента золота в смеси? Но мы на этом остановимся, оставив решение вопроса, как и ожидаемое от него эстетическое удовольствие, на волю нашего читателя, обладающего навыками интеллектуального поиска.

Неожиданность, непредвиденность. Гарсия Маркес как-то сказал: «Старайтесь не намечать целей и планов на необозримое будущее, ведь наиболее значимые вещи случаются неожиданно». Неожиданность и непредвиденность сопровождаются чувством изумления и потому обладают огромным потенциалом эстетической привлекательности.

Неожиданность как эстетический признак математики рассматривают В.Г. Болтянский, Г.И. Саранцев, М.С. Якир, А.В. Волошинов. Последний в своей работе [1] рассматривает следующий пример проявления признака неожиданности. В прямой цилиндр вписаны шар и конус, чье основание совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина находится в центре другого основания цилиндра. Каким образом соотносятся объемы цилиндра, шара и конуса? Несмотря на то, что подсчеты здесь очень простые, тем не менее полученный результат довольно неожиданный. Требуемые соотношения выражаются следующим образом: 3:2:1. Тот факт, что объем цилиндра окажется в три раза больше вписанного в него конуса, следовало ожидать (подобная связь наличествует также и между призмой и вписанной в нее пирамидой). Но факт того, что объем шара окажется в два раза больше объема конуса, был довольно неожиданным, что придало полученному результату некую эстетическую привлекательность.

В процессе математической деятельности данные эстетические признаки проявляются наиболее примечательным образом во время математических открытий. Об эстетической привлекательности неожиданности в математическом открытии пишет А.Пуанкаре [8]. Обычно ученые, исходя из своего опыта и основанной на нем интуиции, для решения научных задач, поставленных перед ними, выдвигают некоторые гипотезы и предпринимают попытки их доказать. Однако не всегда данные гипотезы реализуются, иногда получаются неожиданные или непредсказуемые результаты, и в таких случаях проявляются соответствующие эстетические признаки, которые придают подобным открытиям дополнительную эстетическую привлекательность. Научный мир, к примеру, когда-то был уверен, что, двигаясь из Европы на Запад, мы обязательно достигнем Индии или Китая. Однако материк, открытый Колумбом таким путем, оказался ни Индией, ни Китаем. Можно представить степень эстетического удовольствия, которое получил Колумб или научный мир и общественность, узнав об этом. Такими открытиями богаты все науки.

История развития математики нам также предоставляет огромное количество примеров проявления признака неожиданности и непредсказуемости. Например, Пифагор и его последователи были убеждены, что миром управляют числа. Данное убеждение укоренилось после того, как были выражены закономерности музыки посредством чисел. Но удивление, в особенности разочарование Пифагора и его учеников было огромным, когда выяснилось, что соотношение диагонали и стороны квадрата невозможно выразить соотношением чисел. Следует отметить, что Пифагор и его последователи под числами имели в виду лишь натуральные числа (и их соотношения), и ими была сделана самое большое математическое открытие – открытие иррациональных чисел. Однако получившийся результат был настолько неожиданным, что они были не в состоянии воспринимать его. Впоследствии научная мысль осознала смысл открытия Пифагора: в математику вводились действительные числа, что обогатило математику, сделало ее более совершенной, увеличилась область ее применения, и, естественно, увеличилась также и ее эстетическую привлекательность.

Замечательным примером неожиданности и непредсказуемости является открытие неевклидовой геометрии Ф. Гауссом, Н. Лобачевским и Я. Бойяи. Более двух тысяч лет математики пытались доказать эвклидову аксиому параллельности исключительно с помощью аксиом абсолютной геометрии. Тем не менее, это трио ученых показало, что такого не может быть сделано, и эти аксиомы не зависят друг от друга. И предложив в качестве новой аксиомы противоположную эвклидовой аксиоме параллельности аксиому, они пришли к идее неевклидовой геометрии. И удивительно и неожиданно было то, что эта новая геометрия, к которой математики на начальном этапе относились с недоверием и подозрением, нашла серьезное применение в физике. После всего этого эстетическая привлекательность полученных результатов стала очевидной для всех математиков.

Признаки неожиданности и непредсказуемости также могут проявляться в процессе доказательства математических теорем и решении задач. Одной из самых красивых теорем геометрии и математики в целом является теорема Дезарга: если на плоскости даны треугольники ABC и $A'B'C'$ и прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, то тогда точки пересечения прямых AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC и $B'C$ находятся на одной прямой (и наоборот).

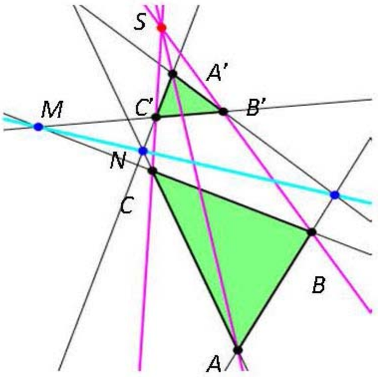

Рис. 1. Иллюстрация к теореме Дезарга

А.В. Волошинов объясняет эстетику этой теоремы посредством первых двух признаков научной эстетики Хатчесона – единством многообразий и всеобщностью [1]. Действительно, заключение теоремы не зависит от вида и расположения треугольников, упомянутых в теореме. Нужно только, чтобы прямые, соединяющие соответствующие вершины треугольников, пересекались в одной точке, и для всего разнообразия таких треугольников справедлив вывод теоремы: точки пересечения продолжений соответствующих их сторон будут находится на одной прямой. Научную эстетику теоремы затрагивает также третий признак Хатчесона — нахождение неочевидной истины. Но теми же особенностями обладают многие другие теоремы математики, которые, однако, не имеют обаяния данной теоремы Дезарга. Следовательно, здесь действуют также и иные признаки научной эстетики. В частности, велика здесь роль признаков неожиданности и особенно непредсказуемости.

Исследуя наличие связей и сходств между алгеброй и геометрией, мы можем пойти еще дальше и раскрыть более глубокие проявления научной эстетики, связанные с теоремой Дезарга. Пифагор и пифагорейцы в основе мироздания ставили числа и объясняли все посредством чисел и их соотношений. Под этими соотношениями-числами обязательно подразумевались перестановочные законы сложения и умножения: от перестановки слагаемых сумма не меняется, и от перестановки сомножителей произведение также не меняется. И вплоть до XIX века математики следовали за Пифагором.

Но в XIX веке выяснилось, что если с операцией сложения такое предположение является естественным, то для умножения оно существенно ограничивает сферу применения чисел, не давая возможность включить их в процесс исследования многих явлений природы. Для преодоления этих ограничений были созданы новые числа, которые, будучи наделенными всеми свойствами сложения и умножения, не были перестановочными по отношению к умножению. Эти числа стали называться гиперкомплексными числами. Впоследствии математики сделали еще один важный шаг: числа были заменены произвольным элементами некоторого множества, с которыми можно было совершить две операции – сложение и умножение и которые обладали всеми свойствами сложения и умножения, кроме перестановочного свойства умножения. Полученные системы были названы телами и получили большое применение как в математике, так и в различных областях науки. Примерами тел являются как системы действительных и комплексных чисел, так и система гиперкомплексных чисел.

Теперь, следуя Декарту, посредством тел можно создать систему координат и на ее основе изложить новую геометрию. Естественно, что подобная геометрия может отличаться от обычной геометрии, ибо перестановочный закон умножения в этих телах может не наличествовать. И действительно, оказывается, что, например, в подобной геометрии невозможно доказать теорему Дезарга. А вот в телах с перестановочным произведением теорема Дезарга имеет место. И удивительно то, что теорема Дезарга имеет место только в полученных посредством перестановочных тел геометриях, то есть, если в полученных с помощью тел геометриях справедлива теорема Дезарга, то умножение в таком теле будет перестановочной [11].

Следовательно, теорема Дезарга в некотором смысле эквивалента перестановочности произведения. Разумеется, здесь научная эстетика проявляется первым (единство многообразий) и третьим (познание неочевидной истины) признаками Хатчесона. И эстетика здесь становится более значимой, поскольку многообразия, о котором идет речь в этих признаках, а именно, алгебраическое тело и геометрическая плоскость довольно далеки друг от друга и различны по своим структурам, что делает более примечательным роль признаков неожиданности и непредсказуемости в эстетической привлекательности полученного результата.

Курс школьной математики хоть и не обладает возможностями математической науки в проявлениях неожиданности и непредсказуемости в своих закономерностях и связях, в частности, в нем отсутствует момент открытия, однако, заключающийся в нем материал достаточен для вовлечения соответствующих эстетических признаков в учебный процесс и передачи эстетической привлекательности этому процессу. Рассмотрим один пример.

Из школьной программы геометрии нам знакома теорема перпендикулярности прямой и плоскости: прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым плоскости также перпендикулярна и любой другой произвольной прямой, находящейся на этой плоскости. Трудоемкое доказательство теоремы в школьных учебниках геометрии связано с некоторыми техническими сложностями, в то время как ее с легкостью можно доказать с помощью применения скалярного произведения. Действительно, если мы вместо прямых рассмотрим параллельные им векторы, то перпендикулярность двух прямых будет означать, что скалярное произведение соответствующих им векторов равно нулю. Допустим, x вектор перпендикулярен векторам u и v плоскости α, то есть скалярное произведение этих векторов равно нулю: $x^{\cdot}u = 0$, $x^{\cdot}v = 0$. Так как векторы u и v не параллельны, то для произвольного w вектора плоскости α найдутся такие действительные числа a и b, что, $w = au + bv$. Посчитаем скалярное произведение векторов x и w: $x^{\cdot}w = x^{\cdot}(\ au + bv) = x^{\cdot}au + x^{\cdot}bv = a(x^{\cdot}u) + b(x^{\cdot}v) = 0 + 0 = 0$, $x^{\cdot}w = 0$. Таким образом, скалярное произведение векоторов x и w равно нулю, то есть они перпендикулярны друг другу.

Эстетическая привлекательность данного доказательства обусловлена прежде всего таким признаком научной эстетики, как неожиданность. Рассмотрим алгебраический пример относительно непредсказуемости решения задачи. Известна следующая задача, приписываемая Эвклиду: показать, что любое нечетное натуральное число является разницей квадратов некоторых двух последовательных чисел [2].

С первого взгляда предложить здесь какое-либо разумное решение кажется невозможным. Но достаточно заметить, что любое нечетное число можно изобразить в виде $2n + 1$, где n – любое неотрицательное целое число, и далее рассмотреть уравнение

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

и «заметить», что произведение $2n + 1$ является слагаемой суммы, стоящей на правой стороне данного уравнения и представить его следующим образом:

$$2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2.$$

Разумеется, сложно ожидать, что ученик средней общеобразовательной школы может «додуматься» до того решения. Однако простата решения и восприятия и его непредсказуемость придают решению эстетическую привлекательность.

Что касается открытий, которые являются важнейшими источниками проявления эстетических признаков неожиданности и непредсказуемости в математической деятельности, то, несмотря на то, что в процессе обучения математике как таковых математических открытий не присутствует, однако, опытный учитель может таким образом организовать учебный процесс, чтобы многие охватываемые в курсе факты не были представлени в готовом виде, а были «открыты» учениками. В свое время в результате как раз такого подхода моего учителя, я в шестом классе «открыл» одну из геометрических теорем. Потом, конечно, выяснилось, что я ничего и не открывал, просто данную теорему мы прошли в следующем классе. Но эстетический заряд от данного «открытия» был настолько велик, что он остался во мне на протяжении всей жизни, передав моей последующей учебной и профессиональной деятельности столь необходимое чувство уверенности.

Некоторые открытия математиков прошлого также можно использовать в процессе обучения математике, учитывая их неожиданность. Выше мы привели пример соотношений 3:2:1 объемов цилиндра и вписанных в нем шара и конуса. Так вот ученикам будет интересно и неожиданно узнать, что часть 3:2 данного выражения (соотношение цилиндра и вписанного в него шара) была открыта величайшим математиком древности Архимедом. И Архимед считал это открытие настолько значимым, что попросил на своей могиле изобразить цилиндр и вписанный в нем шар.

Полезность: Полезность является одним из субъективных признаков научной или математической эстетики, которая служит также в качестве источника мотивации в процессе обучения. Материал, включенный в учебные программы по математике, школьный язык математики, область его применения включают такие знания и навыки, которые понадобятся человеку на протяжении всей жизни. Сказанное относится не только к самым разным применениям математики в жизни и смежных учебных предметах, но и к формированию внутреннего мира, мировосприятия и мировидения учащегося. Из него следует, что для проявления эстетического признака полезности в процессе обучения необходимо сопровождать изложение математического материала его многочисленными применениями, а также формированием ценностей.

Список библиографических ссылок

1. Волошинов А. В. Математика и искусство. 2-е изд. М., 2000. 400 с.
2. Микаелян Г.С. Алгебра–7. Учебник для общеобразовательной школы. Ереван: Эдит Принт, 1999; 2006. (на армянском языке).
3. Микаелян Г.С. Прекрасное и математика. Ереван: Эдит Принт, 2014. (на армянском языке).
4. Микаелян Г.С. Прекрасное и образовательный потенциал математики. Ереван: Эдит Принт, 2015. (на армянском языке).
5. Микаелян Г.С. Образующие признаки научной эстетики в процессе обучения математике: порядок. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. Черкаси: ЧНУ ім. Богдана Хмельницького, 2017. Вип. 6.2017. С. 106–110.
6. Микаелян Г.С. Логические признаки научной эстетики в процессе обучения математике. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. Черкаси: ЧНУ ім. Богдана Хмельницького, 2016. Вип. 18.2016. С. 85–93.
7. Микаелян Г.С. Образующие признаки научной эстетики в процессе обучения математике: гармония. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки.* Черкаси: ЧНУ ім. Богдана Хмельницького, 2017. Вип. 7.2017. С. 88–93.
8. Пуанкаре А. Математическое творчество. Психол. этюд. Юрьевъ: тип. Э.Бергмана, 1909. 24 с.
9. Родионов М.А. Мотивация учения математике. От теоретического осмысления к практической реализации: монография. Saarbrucken, Palmarium Academic Publishing, 2012. 252 p.
10. Саранцев Г. И. Эстетическая мотивация и обучение математике. Саранск, 2003. 136 с.
11. *Харстхорн* Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир*,* 1970. 160 с.

References

1. Voloshinov, A.V. (2000). Mathematics and Art. 2nd edition. Moscow, 2000. 400 p. (in Rus.).
2. Mikaelian, H.S. Algebra-7 (1999, 2006). Textbook for secondary schools. Yerevan: Edith Print. (in Armenian).
3. Mikaelian, H.S. (2014). Beauty and mathematics. Yerevan: Edith Print. (in Armenian).
4. Mikaelian, H.S. (2015). Beauty and educational potential of mathematics. Yerevan: Edith Print. (in Armenian).
5. Mikaelian, H.S. (2017). The forming signs of scientific aesthetics in the process of teaching mathematics: order. *Bulletin of Cherkasy University. Pedagogical Sciences*. Cherkasy: Bogdan Khmelnitsky CNU, Issue 6.2017. 106–110. (in Rus.).
6. Mikaelian, H.S The forming signs of scientific aesthetics in the process of teaching mathematics: harmony. *Bulletin of Cherkasy University. Pedagogical Sciences*. Cherkasy: Bogdan Khmelnitsky CNU, Issue 7.2017. 88–93.
7. Mikayelian, H.S Logical signs of scientific aesthetics in the process of teaching mathematics / GS Mikaelyan. *Bulletin of Cherkasy University. Pedagogical Sciences*. Cherkasy: Bogdan Khmelnitsky CNU, Issue 18.2016. 85–93. (in Rus.).
8. Poincare, A. (1909). Mathematical creativity. Psychological etude. Yuryev: Printing house of E.Bergman (Tartu). 24 p. (in Rus.).
9. Rodionov, M.A. (2012). Motivation of Teaching Mathematics, From Theoretical Reflection to Practical Realization: monograph. Saarbrucken, Palmarium Academic Publishing, 2012. 252 p. (in Rus.).
10. Sarantsev, G.I. (2003). Aesthetic motivation and teaching mathematics. Saransk. 136 p. (in Rus.).
11. Harsthorn, *R.* (1970). Fundamentals of Projective Geometry. *M*oscow: World*.* 160 p. (in Rus.).

MIKAELIAN Hamlet,
Doctor in Pedagogy, PhD in Physics and Mathematics, Professor,
Chair of Mathematics and its Teaching Methods Department,
Armenian State Pedagogical University after Khachatour Abovian
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

MOTIVATIONAL FEATURES OF SCIENTIFIC BEAUTY IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS

Abstract. *In* [5–7], *we examined the objective signs of scientific or mathematical aesthetics (scientific or mathematical beauty), signs that relate to the objects of certain spheres of science. Another part of the signs of scientific aesthetics (scientific beauty) refers to the subject. The manifestation of the aesthetic is also due to the intellectual abilities of the subject carrying out scientific activity. Such signs are curiosity, flexibility and speed of mind, etc. Part of scientific aesthetics (scientific beautiful) are also those signs that are manifested in the process of two-way relationship between the object and the subject and show one or another side of the subject's psyche: cognition, activity, etc. These are, for example, a unexpectedness that expresses a subject in the process of relationship with a scientific object, a utility that expresses the importance of a scientific object for the subject, etc. All this we call subjective signs of scientific aesthetics.*

Subjective signs of scientific aesthetics, we also divide into three groups. In the first group we include those signs that relate to the motivation of the subject's activity. Let's call them motivational signs. It is usefulness, surprise, unpredictability, purposeful overcoming of difficult and difficult obstacles, etc. The second group includes those signs that relate to the process of cognition, its nature (essence). Let's call them cognitive signs. In the list of cognitive signs of scientific aesthetics we include intellectual search, finding, discovery, cognition, understanding of the essence the subject, knowledge of the implicit truth, etc. In the third group of subjective signs, we include those signs that relate to the psyche of the person carrying out the activity. Let's call them the psyche signs of scientific aesthetics. In the psyche signs of scientific aesthetics we attribute the presence of positive signs of thought, imagination, memory, ability, will (insight, speed, flexibility of thought, stability of attention, purposefulness, willpower, etc.). In this paper we consider the motivational group of subjective signs of mathematical aesthetics (mathematical beauty). Motivational signs of scientific aesthetics were considered by many researchers. The roles of aesthetics as the matter of motivation in the teaching process of mathematics attach special importance to M.A. Rodionov [9] *and G.I. Sarantsev* [10].

Key words: *aesthetics of mathematics; signs of mathematical beauty; subjective signs; motivational signs; usefulness; surprise; unpredictability; purposeful overcoming of difficult and difficult obstacles.*

Одержано редакцією 10.11.2017
Прийнято до публікації 25.11.2017