УДК 372.851 DOI 10.31651/2524-2660-2018-9-77-89

КУЗЬМИЧ Валерій Іванович,
кандидат фізико-математичних наук,
професор кафедри алгебри, геометрії та
математичного аналізу,
Херсонський державний університет
e-mail: kuzmich121251@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-8150-3456

КУЗЬМИЧ Людмила Василівна,
кандидат педагогічних наук, доцент
кафедри алгебри, геометрії та
математичного аналізу,
Херсонський державний університет
e-mail: kuzmich121251@ukr.net
https://orcid.org/ 0000-0002-6727-9064

ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРЯМОЛІНІЙНО ТА ПЛОСКО РОЗМІЩЕНИХ МНОЖИН ТОЧОК МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ

Роботу присвячено питанням геометризації метричного простору, що розглядаються у курсі математичного аналізу під час вивчення метричних просторів. Існуюча методична література практично не містить задач з геометричним змістом, що відносяться до вивчення властивостей метричного простору. У ряді робіт вивчались властивості прямолінійного та плоского розміщення точок довільного метричного простору. Відправною точкою у цих роботах були дослідження прямолінійності, що проведені В.Ф. Каганом. Розглядалось поняття кута у метричному просторі, як упорядкованої трійки його елементів. На основі цього поняття вивчалось питання прямолінійного та плоского розміщення точок довільного метричного простору. Дана робота продовжує ці дослідження. Зокрема, розглянуто поняття суміжності двох кутів, утворених точками метричного простору, та встановлено зв'язок цього поняття з поняттям плоского розміщення цих точок. Результати даної роботи дають можливість для створення цілого класу задач, що полегшують вивчення геометричних властивостей метричних просторів.

***Ключові слова**: метричний простір, кут, пряма лінія, прямолінійне розміщення, площина, плоске розміщення.*

Постановка проблеми. У довільному метричному просторі (X,ρ) єдиною його числовою характеристикою є відстань $\rho(a,b)$ між довільними елементами (точками) a і b простору. Цим частково можна пояснити значні проблеми при спробах провести його «геометризацію», тобто ввести аналоги основних геометричних понять геометрії Евкліда – прямої лінії, кута, площини. Введення цих понять з необхідністю вимагає властивості повноти простору.

На наш погляд, у довільному метричному просторі, в окремих випадках (наприклад, у випадку простору зі скінченою або зчисленою кількістю точок), не намагаючись створити повний аналог геометрії Евкліда, можна ввести поняття кута, паралельності, перпендикулярності без вимоги повноти цього простору. Аналогічним чином В.Ф. Каган розглядав поняття «прямолінійного розміщення» точок метричного простору та «прямолінійного образу». За ознаку цих понять та властивостей можна взяти одну з числових характеристик плоского кута у геометрії Евкліда, як це пропонував О. Д. Александров. У цьому випадку можна ввести поняття «плоского розміщення» точок довільного метричного простору, як аналога площини у геометрії Евкліда. В якості ознаки «плоского розміщення» точок простору можна використати умову рівності нулю об'єму тетраедра, вершини якого належать одній площини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В.Ф. Каган у роботі [1, с. 260-297] побудував аксіоматичну теорію Евклідової прямої лінії, запропонувавши чотири групи постулатів: I_{1-5} – постулати розміщення, II_{1-3} – постулати структури, III_{1-7} – постулати конгруентності, IV_1 – постулат Архімеда, IV_2 – постулат Кантора. У роботі [2, с. 29] автор запропонував для вивчення прямолінійності у довільному метричному просторі ввести поняття кута, утвореного трьома точками простору, як упорядкованої трійки цих точок, та кутової характеристики. Ця характеристика базується на формулі косинусів, як це пропонував О.Д. Александров [3, с. 36]. У роботах [4, с. 11-12] і [5, с. 42-43], використовуючи поняття кута та кутової характеристики, автор ввів поняття плоского розміщення точок довільного метричного простору, для визначення якого використовувалась рівність нулю аналога визначника матриці Грама системи одиничних векторів.

У даній роботі наведені доведення деяких тверджень, що анонсовані в роботі [4], та доведено, що при виконанні умови прямолінійного розміщення точок деякої підмножини довільного метричного простору, для неї виконуються постулати I_{1-4}, які розглянуті В.Ф. Каганом.

Поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору детально вивчалось у роботі [1]. У тій формі, як це поняття буде розглядатись у даній роботі, воно зустрічається у роботі [6, с. 527].

Мета статті. Як правило, при вивченні конкретних метричних просторів розглядають лише задачі на метризацію цього простору і, практично, відсутні задачі, що розкривають геометричні властивості цих просторів та їх внутрішню структуру. Дана робота має на меті створити інструментарій для побудови у метричному просторі звичних геометричних об'єктів і понять евклідової та неевклідової геометрій, що дасть можливість провести структуризацію цього простору.

Виклад основного матеріалу.

1. Наступні означення вводились у попередніх роботах. Наведемо їх, з незначними модифікаціями, для кращого розуміння подальших міркувань.

Довільний метричний простір X з введеною у ньому метрикою ρ будемо позначати через (X,ρ). Надалі, усі точки простору будемо вважати різними, тобто, будемо розглядати лише додатні відстані між точками простору: $\rho(a,b)>0$. Крім того, будемо користуватись властивістю комутативності відстані: $\rho(a,b)=\rho(b,a)$.

Означення 1. *Нехай a, b і c – довільні точки метричного простору (X,ρ). Упорядковану трійку (a,b,c) цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці b, і позначати: $\angle(a,b,c)$. Пари точок (a,b) і (b,c), при цьому, будемо називати сторонами кута* (див. [2, с. 28]).

Означення 2. *Нехай a, b і c – довільні точки метричного простору (X,ρ). Характеристикою кута $\angle(a,b,c)$, або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число $\varphi(a,b,c)$, що знаходиться за формулою:*

$$\varphi(a,b,c)=\frac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)} \quad (1)$$

(див. [2, с. 29] і [3, с. 36]).

Метричний простір (X,ρ), у якому введено поняття кута за означенням 1, і його характеристику за означенням 2, будемо називати метричним простором з кутовою характеристикою і позначати Π.

Означення 3. *Будемо казати, що точки* a, b, c *простору* Π *прямолінійно розміщені, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки* b*) виконується рівність*

$$\varphi^2(a,b,c)=1 \quad (2)$$

(див. [2, с. 29]).

Означення 4. *Будемо казати, що множина точок простору* Π *прямолінійно розміщена, якщо будь які три точки цієї множини прямолінійно розміщені* (див. [5, с. 527]).

Рівність (2) рівносильна рівності $\varphi(a,b,c)=\pm1$, причому, при виконанні рівності $\varphi(a,b,c)=-1$, природно казати, що точка b «лежить між» точками a і c, а кут $\angle(a,b,c)$ називати «розгорнутим». При виконанні рівності $\varphi(a,b,c)=1$, природно казати, що точка b «лежить поза» точками a і c, а кут $\angle(a,b,c)$ називати «нульовим».

З рівності (1) легко отримати, що рівність $\varphi(a,b,c)=-1$ еквівалентна рівності $\rho(a,c)=\rho(a,b)+\rho(b,c)$, а рівність $\varphi(a,b,c)=1$ еквівалентна сукупності двох рівностей: $\left[\begin{array}{l}\rho(a,b)=\rho(a,c)+\rho(b,c);\\ \rho(b,c)=\rho(a,c)+\rho(a,b).\end{array}\right.$

Наведемо приклад прямолінійно розміщеної множини точок метричного простору.

Приклад 1. Розглянемо простір R_1^n, точками якого є впорядковані групи n дійсних чисел $x(x_1,x_2,...x_n)$. Якщо відстань між точками x і y простору означити за формулою $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$, то цей простір стає метричним [7, с. 42].

Нехай для будь-яких трьох точок $x(x_1,x_2,...,x_n)$, $y(y_1,y_2,...,y_n)$ і $z(z_1,z_2,...,z_n)$ множини P виконуються нерівності $x_k\le y_k\le z_k$ для усіх значень $k=1,2,...,n$. Покажемо, що множина P прямолінійно розміщена у просторі R_1^n. Дійсно, справедливі наступні рівності:

$$\rho(x,z)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-z_k|=\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)=\sum_{k=1}^{n}((z_k-y_k)+(y_k-x_k))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)+\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)=\sum_{k=1}^{n}|z_k-y_k|+\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|=\rho(y,z)+\rho(y,x),$$

а це і означає, що точки x, y і z розміщені прямолінійно. З довільності вибору цих точок, за означенням 4, випливає прямолінійне розміщення множини P.

З прикладу 1 можна зробити висновок, що прямолінійне розміщення точок простору Π характеризує певну «монотонність» множини цих точок відносно метрики простору.

Властивість прямолінійності розміщення точок простору Π значною мірою залежить від метрики простору. На це вказує наступний приклад.

Приклад 2. Розглянемо простір C_L функцій, неперервних на відрізку [0;1], у якому за відстань між точками (функціями) $f(x)$ і $g(x)$ знаходиться за формулою: $\rho(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$. Такий простір є метричним [8, с. 105].

Візьмемо чотири точки цього простору:

$$y_1=x+1,\ y_2=x,\ y_3=x-2,\ y_4=-x.$$

Знайдемо віддалі між цими точками:

$$\rho(y_1,y_2)=1,\ \rho(y_1,y_3)=3,\ \rho(y_1,y_4)=2,\ \rho(y_2,y_3)=2,\ \rho(y_2,y_4)=1,\ \rho(y_3,y_4)=1.$$

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики:

$$\varphi(y_2,y_1,y_3)=1,\ \varphi(y_2,y_1,y_4)=1,\ \varphi(y_3,y_1,y_4)=1,$$
$$\varphi(y_1,y_2,y_3)=-1,\ \varphi(y_1,y_2,y_4)=-1,\ \varphi(y_3,y_2,y_4)=1,$$
$$\varphi(y_1,y_3,y_2)=1,\ \varphi(y_1,y_3,y_4)=1,\ \varphi(y_2,y_3,y_4)=1,$$
$$\varphi(y_1,y_4,y_2)=1,\ \varphi(y_1,y_4,y_3)=-1,\ \varphi(y_2,y_4,y_3)=-1.$$

З отриманих рівностей, за означеннями 3 і 4, випливає, що усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі C_L, причому, вони розміщені у наступному порядку: y_1,y_2,y_4,y_3.

З іншого боку, у роботі [5, с. 41-42, Приклад 1] показано, що ці точки у метричному просторі $C_{[0;1]}$, в якому відстань між точками $f(x)$ і $g(x)$ знаходиться за формулою: $\rho(f,g)=\max_{x\in[0;1]}|f(x)-g(x)|$, не є прямолінійно розміщеними.

Використовуючи рівність (1) можна, за аналогією з геометрією Евкліда, дати наступне означення «прямого» кута $\angle(a,b,c)$ у просторі Π.

Означення 5. *Нехай для точок a, b, c простору Π виконується рівність $\varphi(a,b,c)=0$, тоді кут $\angle(a,b,c)$ будемо називати прямим.*

Розглянемо метричний простір l_2 – множину різних послідовностей $\{x_n\}$ дійсних чисел, для яких виконується умова: $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$, а відстань між двома точками x і y цього простору визначається за формулою: $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}$ (див. [7, с. 43]. У цьому просторі точки $e_1(1,0,0,...)$, $e_2(0,1,0,...)$, $e_3(0,0,1,...),\dots$ утворюють ортогональний нормований базис. Якщо до них приєднати точку $e_0(0,0,0,...)$, то будь-який кут $\angle(e_i,e_0,e_j)$ буде прямим. Дійсно, у цьому випадку отримуємо: $\rho(e_0,e_i)=\rho(e_0,e_j)=1$ і $\rho(e_i,e_j)=\sqrt{2}$. За формулою (1) знаходимо: $\varphi(e_i,e_0,e_j)=0$ для будь-яких значень $i\neq j\neq 0$.

2. Покажемо, що у просторі Π для прямолінійно розміщених точок виконуються постулати розміщення I_{1-4} роботи [1]. Ці постулати, з несуттєвими змінами у формулюванні та у позначеннях роботи [1], мають наступний вигляд.

«I_1. Якщо точка b лежить між точками a і c, то вона лежить також між c і a.» (див. [1, с. 260]).

Виконання цього постулату для простору Π випливає з властивості симетричності рівності (1): $\varphi(a,b,c)=\varphi(c,b,a)$.

«I_2. Із будь яких трьох точок a,b,c, принаймні, одна лежить між двома іншими» (див. [1, с. 260]).

Нехай маємо три точки a, b, c простору Π, для яких виконується рівність (2). При виконанні рівності $\varphi(a,b,c) = -1$ виконання постулату I_2 очевидне. Нехай виконується рівність $\varphi(a,b,c) = 1$. У цьому випадку, використовуючи рівність (1), отримаємо:

$$\varphi(a,b,c) = \frac{\rho^2(a,b) + \rho^2(b,c) - \rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)} = 1, \text{ або } \rho^2(a,c) = (\rho(a,b) - \rho(b,c))^2.$$

Остання рівність розкладається на сукупність двох рівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\rho(a,c) = \rho(a,b) - \rho(b,c);\\ \rho(a,c) = \rho(b,c) - \rho(a,b),\end{array}\right. \text{ або } \left[\begin{array}{l}\rho(a,b) = \rho(a,c) + \rho(b,c);\\ \rho(b,c) = \rho(a,c) + \rho(a,b).\end{array}\right.$$

У першому випадку точка c лежить між точками a і b, а у другому – точка a лежить між точками b і c. Отже, постулат I_2 виконується.

«I_3. Якщо точка b лежить між точками a і c, то точка c не лежить між точками a і b» (див. [1, с. 260]).

Цей постулат виконується для довільного метричного простору, однак, через специфічність означення прямолінійної розміщеності за допомогою кутової характеристики, ми перевіримо його виконання. Крім того, це дасть можливість встановити той факт, що з трьох прямолінійно розміщених точок лише одна лежить між двома іншими, кожна з яких лежить поза двома іншими.

Нехай виконується рівність $\varphi(a,b,c) = -1$. У цьому випадку, використовуючи рівність (1), отримаємо:

$$\varphi(a,b,c) = \frac{\rho^2(a,b) + \rho^2(b,c) - \rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)} = -1, \text{ або } \rho(a,c) = \rho(a,b) + \rho(b,c).$$

Використовуючи отриману рівність, знайдемо значення кутової характеристики $\varphi(a,c,b)$:

$$\varphi(a,c,b) = \frac{\rho^2(a,c) + \rho^2(c,b) - \rho^2(a,b)}{2\rho(a,c)\rho(c,b)} = \frac{(\rho(a,b) + \rho(b,c))^2 + \rho^2(c,b) - \rho^2(a,b)}{2(\rho(a,b) + \rho(b,c))\rho(c,b)} =$$

$$= \frac{\rho^2(a,b) + 2\rho(a,b)\rho(b,c) + \rho^2(b,c) + \rho^2(c,b) - \rho^2(a,b)}{2(\rho(a,b) + \rho(b,c))\rho(b,c)} = \frac{2\rho(a,b)\rho(b,c) + 2\rho^2(b,c)}{2(\rho(a,b) + \rho(b,c))\rho(b,c)} = 1$$

Ця рівність означає, що точка c лежить поза точками a і b, а тому не може лежати між ними. Таким чином, постулат I_3 виконується. Аналогічно можна встановити, що у цьому випадку і точка a теж лежить поза точками b і c.

«I_4. Якщо точка b лежить між точками a і c, а точка d лежить між точками a і b, то точка d лежить між точками a і c» (див. [1, с. 260]).

Цей постулат теж виконується у довільному метричному просторі. Дійсно, нехай точка b лежить між точками a і c. Це означає, що виконується рівність $\rho(a,c) = \rho(a,b) + \rho(b,c)$. Якщо точка d лежить між точками a і b, то це означає, що виконується рівність $\rho(a,b) = \rho(a,d) + \rho(d,b)$. Підставивши цю рівність у праву частину попередньої рівності, матимемо: $\rho(a,c) = \rho(a,b) + \rho(b,c) =$ $= \rho(a,d) + \rho(d,b) + \rho(b,c)$. Із нерівності трикутника матимемо: $\rho(d,b) + \rho(b,c) \geq \rho(d,c)$. Таким чином, буде виконуватись нерівність: $\rho(a,c) \geq \rho(a,d) + \rho(d,c)$. А це, внаслідок нерівності трикутника, можливо лише у випадку виконання рівності: $\rho(a,c) = \rho(a,d) + \rho(d,c)$. Отже, точка d лежить між точками a і c.

Постулат I_5 у цій роботі ми розглядати не будемо, однак зауважимо, що його невиконання приводить до елементів неевклідової геометрії у просторі Π.

3. Тепер розглянемо узагальнення поняття прямолінійного розміщення точок простору Π. Це поняття було введено автором у роботах [4,5].

Означення 6. *Будемо казати, що точки a, b, c, d простору* Π *плоско розміщені, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки b) виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

(див. [4, с. 11-12] і [5, с. 42]).

Аналітично, у геометрії Евкліда, рівність (3) означає рівність нулю об'єму тетраедра, вершини якого знаходяться у точках a, b, c, d [9].

Для точок довільної підмножини простору Π природно дати наступне означення їх «плоского розміщення».

Означення 7. *Будемо казати, що множина точок простору* Π *плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені* (див. [4, с. 12] і [5, с. 43]).

Порівняємо метрики просторів $C_{[0;1]}$ і C_L - яким чином вони впливають на властивості прямолінійного та плоского розміщення точок.

Приклад 3. Повернувшись до прикладу 2, попробуємо встановити, чи є точки y_1, y_2, y_3, y_4 плоско розміщеними у просторі C_L. Для цього підставимо знайдені у прикладі значення кутових характеристик для однієї з вершин (наприклад, для y_1) у визначник, що знаходиться у лівій частині рівності (3). Обчислюючи цей визначник, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(y_2,y_1,y_3) & \varphi(y_2,y_1,y_4) \\ \varphi(y_2,y_1,y_3) & 1 & \varphi(y_3,y_1,y_4) \\ \varphi(y_2,y_1,y_4) & \varphi(y_3,y_1,y_4) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, за означенням 6, точки y_1, y_2, y_3, y_4 плоско розміщені у просторі C_L. Легко перевірити, що такий же результат отримаємо , якщо за вершину кутів взяти будь яку іншу з цих точок.

Приклад 4. Вище ми вже згадували, що у роботі [5] встановлено відсутність прямолінійного розміщення точок $y_1 = x+1$, $y_2 = x$, $y_3 = x-2$, $y_4 = -x$ у метричному просторі $C_{[0;1]}$. Встановимо за метрикою цього простору відстані між точками y_1, y_2, y_3, y_4. Матимемо:

$\rho(y_1,y_2)=1$, $\rho(y_1,y_3)=3$, $\rho(y_1,y_4)=3$, $\rho(y_2,y_3)=2$, $\rho(y_2,y_4)=2$, $\rho(y_3,y_4)=2$.

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики:

$$\varphi(y_2,y_1,y_3)=1,\ \varphi(y_2,y_1,y_4)=1,\ \varphi(y_3,y_1,y_4)=\frac{7}{9},$$

$$\varphi(y_1,y_2,y_3)=-1,\ \varphi(y_1,y_2,y_4)=-1,\ \varphi(y_3,y_2,y_4)=\frac{1}{2},$$

$$\varphi(y_1,y_3,y_2)=1,\ \varphi(y_1,y_3,y_4)=\frac{1}{3},\ \varphi(y_2,y_3,y_4)=\frac{1}{2},$$

$$\varphi(y_1,y_4,y_2)=1,\ \varphi(y_1,y_4,y_3)=\frac{1}{3},\ \varphi(y_2,y_4,y_3)=\frac{1}{2}.$$

Легко впевнитись, що яку б точку із заданих ми не вибрали за вершину кутів, визначник у лівій частині рівності (3) буде відмінним від нуля. За означенням 6 отримуємо, що точки y_1,y_2,y_3,y_4 не є плоско розміщеними у просторі $C_{[0;1]}$.

З прикладів 2-4 можна зробити висновок про те, що метрика простору C_L має більший вплив на структуризацію метричного простору, забезпечуючи властивості прямолінійного та плоского розміщення точок, які у просторі $C_{[0;1]}$ цих властивостей могли не мати.

З наведених прикладів може скластись враження, що довільні чотири прямолінійно розміщені точки завжди є плоско розміщеними у одному і тому ж метричному просторі. Однак, це не завжди вірно.

Для того, щоб встановити співвідношення між прямолінійним і плоским розміщенням точок метричного простору Π, рівність (3), розкривши визначник, перепишемо у іншому вигляді:

$$\varphi^2(a,b,c)+\varphi^2(a,b,d)+\varphi^2(c,b,d)-2\varphi(a,b,c)\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d)-1=0. \qquad (4)$$

Припустивши, що точки a,b,c,d розміщені у просторі Π прямолінійно, з рівності (4) отримаємо рівність: $\varphi(a,b,c)\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d)=1$. Це і є умова плоского розміщення прямолінійно розміщених точок a,b,c,d у просторі Π. Справедливим є наступне твердження.

Лема 1. *Для того, щоб прямолінійно розміщені у просторі* Π *точки* a,b,c,d *були плоско розміщені у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність:* $\varphi(a,b,c)\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d)=1$*, хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки* b*).*

Слід зазначити, що у роботі [5, с. 43, Лема 1] подібна лема сформульована неповно.

Приклад 5. Наведемо приклад плоского розміщення точок, не розміщених прямолінійно. Для цього у просторі $C_{[0;1]}$ візьмемо чотири точки:

$$y_1=x,\ y_2=0,\ y_3=x-1,\ y_4=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-0{,}5).$$

Знайдемо відстані між цими точками: $\rho(y_1,y_2)=1$, $\rho(y_1,y_3)=1$, $\rho(y_1,y_4)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\rho(y_2,y_3)=1$, $\rho(y_2,y_4)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\rho(y_3,y_4)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики:

$$\varphi(y_1,y_4,y_2)=-0{,}5,\ \varphi(y_1,y_4,y_3)=-0{,}5,\ \varphi(y_2,y_4,y_3)=-0{,}5.$$

Для зручності обчислень, позначимо точки: $y_1=a$, $y_2=c$, $y_3=d$, $y_4=b$. Підставивши ці значення у формулу (3), будемо мати:

$$\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

За означенням (6) точки y_1,y_2,y_3,y_4 плоско розміщені.

З іншого боку, легко помітити, що ніякі три з цих точок не розміщені прямолінійно (немає відстані, що дорівнює сумі двох інших). У геометрії Евкліда точка y_4 є центром рівностороннього трикутника з вершинами у точках y_1, y_2, y_3.

4. З метою встановлення більш тісних взаємовідношень між прямолінійно та плоско розміщеними точками простору Π, а також з метою встановлення інструментарію для побудови плоско розміщених множин точок у конкретних метричних просторах, введемо поняття суміжності для двох кутів зі спільною вершиною. Основою для такого поняття може слугувати лема 2 доведена у роботі [5, с. 43]. Наведемо її формулювання.

Лема 2. *Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим.*

Для того, щоб точки a, b, c, d цього простору були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність: $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$.

Зазначену у формулюванні леми 2 рівність можна використати для означення суміжності двох кутів.

Означення 8. *Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим, а точка d цього простору така, що виконується рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$. Тоді кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ будемо називати суміжними.*

Із означення 8 та леми 2 випливає, що точки, які утворюють суміжні кути, плоско розміщені. Крім того, розгорнутий і нульовий кути є суміжними, а із рівності $0 = -0$ випливає, що кут суміжний з прямим кутом теж є прямим. Зокрема, у прикладі 2 кути $\angle(y_1, y_2, y_4)$ і $\angle(y_3, y_2, y_4)$ є суміжними у просторі C_L, оскільки виконуються рівності $\varphi(y_1, y_2, y_4) = -1$ і $\varphi(y_3, y_2, y_4) = 1$, а усі чотири точки розміщені прямолінійно. З тієї ж причини суміжними будуть кути $\angle(y_1, y_2, y_3)$ і $\angle(y_3, y_2, y_4)$, $\angle(y_1, y_4, y_3)$ і $\angle(y_1, y_4, y_2)$, $\angle(y_2, y_4, y_3)$ і $\angle(y_1, y_4, y_2)$.

У геометрії Евкліда суміжний кут розуміють як кут, що доповнює заданий до розгорнутого (див. [10, с. 11] і [11, с. 12]). У просторі Π такого означення суміжного кута дати не можна, оскільки у цьому просторі навіть для прямого кута, кут який доповнює його до розгорнутого не обов'язково є прямим.

Приклад 6. До точок $y_1 = x+1$, $y_2 = x$, $y_3 = x-2$, $y_4 = -x$ простору $C_{[0;1]}$, що розглядались у прикладі 3, добавимо точку $y_5 = (1-\sqrt{2})x + 1$, що також належить цьому простору. Знайдемо віддалі:

$\rho(y_1, y_2) = 1$, $\rho(y_1, y_5) = \sqrt{2}$, $\rho(y_2, y_5) = 1$, $\rho(y_3, y_5) = 3$, $\rho(y_4, y_5) = 3 - \sqrt{2}$.

Таким чином , кут $\angle(y_1, y_2, y_5)$ є прямим, оскільки за формулою (1) маємо: $\varphi(y_1, y_2, y_5) = 0$. З прикладу 3 випливає, що точки y_1, y_2, y_3 прямолінійно розміщені, як і точки y_1, y_2, y_4. Тому слід було очікувати, що кути $\angle(y_3, y_2, y_5)$ і $\angle(y_4, y_2, y_5)$, що доповнюють кут $\angle(y_1, y_2, y_5)$ до розгорнутого, теж мають бути прямими. Однак, за формулою (1) отримуємо:

$$\varphi(y_3, y_2, y_5) = -1 \text{ і } \varphi(y_4, y_2, y_5) = \frac{3\sqrt{2} - 3}{2}.$$

Приклад 6, на наш погляд, вказує на доречність означення 8 при введенні поняття суміжного кута у просторі Π.

Наступна лема, як і лема 2, дає критерій плоскої розміщеності чотирьох точок простору Π у випадку, коли три з них утворюють прямий кут.

Лема 3. *Нехай у просторі* Π *кут* $\angle(a,b,c)$ *є прямим.*

Для того, щоб точки a, b, c, d *були плоско розміщені у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi^2(a,b,d)+\varphi^2(c,b,d)=1. \qquad (5)$$

Доведення. Із означення 5 випливає рівність $\varphi(a,b,c)=0$. Підставимо це значення у рівність (3) і розкриємо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varphi(a,b,d) \\ 0 & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 1-\varphi^2(a,b,d)-\varphi^2(c,b,d).$$

З отриманої рівності та означення 6 випливає, що рівність (5) необхідна і достатня для того, щоб при умові теореми точки a, b, c, d були плоско розміщені. Лема 3 доведена.

Ця лема має самостійне значення, оскільки за її допомогою у просторі Π можна встановити прямокутну систему координат, по відношенню до трьох фіксованих точок простору.

Властивість суміжності кутів у просторі Π можна використати для встановлення рівності кутових характеристик кутів зі спільною вершиною. Наступна теорема дає можливість встановлювати рівність числових характеристик кутів, що мають прямолінійно розміщені відповідні сторони [12, с. 67].

Теорема 1. *Нехай* a, b, c, d *точки простору* Π, *причому, кут* $\angle(a,b,c)$ *є розгорнутим.*

Для того щоб виконувалась рівність $\varphi(b,a,d)=\varphi(c,a,d)$, *необхідно і достатньо, щоб кути* $\angle(a,b,d)$ *і* $\angle(c,b,d)$ *були суміжними.*

Ця теорема дає умову рівності кутових характеристик кутів, у яких спільна вершина, а сторони прямолінійно розміщені. Цю умову можна використати, як означення рівності самих кутів.

Порівнявши лему 2 і теорему 1, можна зробити висновок про те, що у випадку, коли у просторі Π є три прямолінійно розміщені точки a, b, c, причому, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим, то множину усіх точок d цього простору, плоско розміщених із заданими, можна описати, як точки, для яких кути $\angle(a,b,d)$ *і* $\angle(c,b,d)$ є суміжними, або для яких кути $\angle(b,a,d)$ *і* $\angle(c,a,d)$ мають рівні кутові характеристики.

Як і у випадку прямолінійного розміщення точок простору Π, слід очікувати неоднозначності при плоскому розміщенні точок цього простору. Дійсно, на це вказує наступний приклад.

Приклад 7. Розглянемо точки $y_1=x+1$, $y_2=x$, $y_5=(1-\sqrt{2})x+1$ простору $C_{[0;1]}$, що розглядались у прикладі 6. Крім того, розглянемо точки $y_6=(\sqrt{2}-1)(x-1)$ і $y_7=(2-\sqrt{2})x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, що також належать простору $C_{[0;1]}$.

Знайдемо відстані:

$\rho(y_1,y_2)=1$, $\rho(y_1,y_5)=\sqrt{2}$, $\rho(y_1,y_6)=2$, $\rho(y_1,y_7)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\rho(y_2,y_5)=1$, $\rho(y_2,y_6)=1$,

$\rho(y_2,y_7)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\rho(y_5,y_6)=\sqrt{2}$, $\rho(y_5,y_7)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\rho(y_6,y_7)=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Із отриманих рівностей випливає, що точки y_1,y_2,y_6 прямолінійно розміщені, оскільки виконується рівність $\rho(y_1,y_6)=\rho(y_1,y_2)+\rho(y_2,y_6)$.

Покажемо, що кут $\angle(y_5,y_2,y_6)$ є прямим. Дійсно, за формулою (1) маємо: $\varphi(y_5,y_2,y_6)=0$. Крім того, у прикладі 6 було встановлено, що кут $\angle(y_1,y_2,y_5)$ теж є прямим. Таким чином, ці кути є суміжними, і за теоремою 1 точки y_1,y_2,y_5,y_6 є плоско розміщеними.

Тепер покажемо, що точки y_1,y_2,y_5,y_7 теж є плоско розміщеними. Для цього за формулою (1) обчислимо кутові характеристики:

$\varphi(y_1,y_2,y_7)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ і $\varphi(y_5,y_2,y_7)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, виконується рівність $\varphi^2(y_1,y_2,y_7)+\varphi^2(y_5,y_2,y_7)=1$. Оскільки кут $\angle(y_1,y_2,y_5)$ є прямим, то з отриманої рівності і теореми 1 випливає, що точки y_1,y_2,y_5,y_7 є плоско розміщеними.

Для двох розглянутих множин точок три точки y_1,y_2,y_5 є спільними. У геометрії Евкліда цього достатньо для того, щоб усі п'ять точок y_1,y_2,y_5,y_6,y_7 належали одній площині. Однак, у просторі Π це не завжди так.

Покажемо, що точки y_2,y_5,y_6,y_7 не є плоско розміщеними. Для цього обчислимо кутову характеристику: $\varphi(y_6,y_2,y_7)=2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Таким чином, виконується рівність $\varphi^2(y_5,y_2,y_7)+\varphi^2(y_6,y_2,y_7)=9-6\sqrt{2}$. Оскільки кут $\angle(y_5,y_2,y_6)$ є прямим, то, за теоремою 1, точки y_2,y_5,y_6,y_7 не є плоско розміщеними, а також точки y_1,y_2,y_6,y_7 теж не є плоско розміщеними. Щоб упевнитись у цьому, за теоремою 1 достатньо порівняти кутові характеристики кутів $\angle(y_1,y_2,y_7)$ і $\angle(y_6,y_2,y_7)$, оскільки точки y_1,y_2,y_6 прямолінійно розміщені.

Крім того, можна показати, що і точки y_1,y_5,y_6,y_7 теж не є плоско розміщеними. Дійсно, точки y_1,y_5,y_7 прямолінійно розміщені, оскільки виконується рівність $\rho(y_1,y_5)=\rho(y_1,y_7)+\rho(y_5,y_7)$. Крім того, кут $\angle(y_1,y_7,y_5)$ є розгорнутим. Тепер, у відповідності до леми 2, достатньо показати, що виконується співвідношення $\varphi(y_1,y_7,y_6)\neq-\varphi(y_5,y_7,y_6)$. Для цього обчислимо кутові характеристики:

$\varphi(y_1,y_7,y_6)=-1$, $\varphi(y_5,y_7,y_6)=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$. Отже, точки y_1,y_5,y_6,y_7 не є плоско розміщеними.

Висновки. Поняття плоского розміщення точок у метричному просторі є логічним узагальненням поняття їх прямолінійного розміщення, що означається за допомогою поняття кута між трьома точками простору та його кутової характеристики. Перевагою такого підходу до вивчення структури метричного простору є його конструктивність та можливість застосування до скінчених множин. Результати, отримані у даній роботі, дають можливість створення цілого класу задач, що полегшують вивчення геометричних властивостей метричних просторів. Зокрема, стає можливою побудова прямолінійних та плоских структур у конкретних метричних просторах. Це, на нашу думку, значно полегшить вивчення метричних просторів. Оскільки в роботі не використовувались елементи граничного переходу, то результати роботи можна використати при вивченні властивостей елементарних функцій, зокрема і у шкільному курсі математики.

Подальші дослідження слід, на нашу думку, продовжити у напрямку встановлення для множин точок метричного простору понять, що аналогічні класичним поняттям паралельності та перпендикулярності, а також вивчення співвідношень між ними. Це дасть можливість застосувати отримані результати до побудови основних геометричних об'єктів – плоских фігур та просторових тіл у метричних просторах.

Список використаної літератури.

1. Каган В. Ф. Основания геометрии. Часть 2 / В. Ф. Каган. – М.-Л.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
2. Кузьмич В. І. Поняття кута при вивченні властивостей метричного простору // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – 2016. – № 13. – С. 26–32.
3. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей / А.Д. Александров. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 388 с.
4. Кузьмич В. І. Кутова характеристика у метричному просторі [Електронний ресурс] // Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference : book of abstracts. – May 31-June 5, 2017. – P. 11–12. – Режим доступу : https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf
5. Кузьмич В. І. Побудова плоских образів у довільному метричному просторі // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – 2017. – № 11. – С. 40–46.
6. Каган В. Ф. Очерки по геометрии / В. Ф. Каган. – М.: Издательство Московского университета, 1963. – 571 с.
7. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А.М. Колмогоров, С.В. Фомін. – Київ: Вища школа, 1974. – 455 с.
8. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Частина 3 / М.О. Давидов. – Київ: Вища школа, 1979. – 383 с.
9. Кузьмич В. І., Кузьмич Ю. В. Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра / В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – 2012. – № 36(249). – С. 55–64.
10. Начала Евклида. Книги I-VI / Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовский. – М.-Л: Гостехиздат, 1948. – 447 с.
11. Давид Гильберт. Основания геометрии / Давид Гильберт. – Петроград: Сеятель, 1923. – 152 с.
12. Кузьмич В. І. Плоско розміщені множини точок у метричному просторі. / Валерій КУЗЬМИЧ // Вісник Львівського університету. Серія: механіко-математична. – 2017. – Випуск 83. – С. 58–71.

References.

1. Kahan V. F. (1956). *Foundations of geometry. Part 2.* M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
2. Kuz'mich V. I. (2016). The concept of angle in the study of the properties of a metric space. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky (Bulletin of Cherkassy University. Series: pedagogical sciences), 13, 26–32* (in Ukr.)
3. Aleksandrov A.D. (1948). *Intrinsic geometry of convex surfaces.* M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
4. Kuz'mich V. I. (2017). Angular characteristic in metric space. *Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference : book of abstracts. – May 31-June 5, 2017, Odessa, Ukraine, 11–12.* Retrieved from https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf (in Ukr.)
5. Kuz'mich V. I. (2017). Construction of flat images in an arbitrary metric space. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky (Bulletin of Cherkassy University. Series: pedagogical sciences), 11, 40–46* (in Ukr.)

6. Kahan V. F. (1963). *Essays on geometry.* M.: Moscow University (in Russ.)
7. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. (1974). *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Kiev: Vishha shkola (in Ukr.)
8. Davidov M.O. (1979). *Course of mathematical analysis. Part 3*. Kiev: Vyshcha shkola (in Ukr.)
9. Kuz'mich V. I., Kuz'mich Yu. V. (2012). Analogs of formula Jungius volume tetrahedron. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky (Bulletin of Cherkassy University. Series: pedagogical sciences), 2012, 36(249),* 55–64 (in Ukr.)
10. *Euclid's Elements. Books I-VI.* (1948). In D.D. Mordukhai-Boltovskii (Ed.). M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
11. David Hilbert (1923). *Foundations of geometry.* Petrohrad: Seiatel (in Russ.)
12. Kuz'mich V. I. (2017). The flat placement sets of points of metric space. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Seriia: Mehanico-matematichna (Visnyk of the Lviv Univ. Series: Mec.-Math.), 2017, 83,* 58–71(in Ukr.)

KUZ'MICH Valeriy,
PhD in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis, SIHE «Kherson State University».

KUZ'MICH Ludmila,
PhD in Pedagogy, Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis, SIHE «Kherson State University».

INVESTIGATION OF THE PROPERTIES OF THE LINEAR AND PLANE-PLACEABLE MULTIPLES OF A POINT OF METRIC SPACE.

Abstract. Introduction. *This work is devoted to questions of geometrization of metric space. Similar issues are considered in mathematical analysis, while studying metric spaces. Existing methodological literature, in practice, does not contain problems with geometric content, relating to the study of properties of metric space. In a number of papers the properties of straight-linearly and flat placement of points of arbitrary metric space were studied. The starting point in these works was the study of straightforwardness conducted by V.F. Kagan. The notion of angle in the metric space as an ordered triple of its elements was considered. On the basis of this concept, the problem of straight-linearly and flat placement of points of arbitrary metric space was studied. This work continues these studies. In particular, the notion of adjacency of two angles formed by the points of a metric space, and the relation of this concept with the concept of a plane arrangement of these points. The results of this work give an opportunity to create a whole class of tasks that facilitate the study of the geometric properties of metric spaces.*

Purpose. *As a rule, when studying specific metric spaces, only the problems of metrization of this space are considered and, practically, there are no exercises that reveal the geometric properties of these spaces and their internal structure. This work is intended to create a toolkit for constructing in the metric space the usual geometric objects and the concepts of Euclidean and non-Euclidean geometries, which will enable the structuring of this space.*

Methods. *In work used the method of analytical transformations and the method of geometric interpretation.*

Results. *In work the following concepts are used.*

Let a, b, c *– arbitrary points of metric space* (X,ρ). *An ordered triple of these points* (a,b,c) *will be called an angle with a vertex at the* b *point, and denote* $\angle(a,b,c)$. *The angular characteristic of the angle* $\angle(a,b,c)$ *will be called the real number, which is represented by the formula:* $\varphi(a,b,c)=\dfrac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)}$.

The metric space, in which the notion of the angle and its characteristics are introduced, will be denoted Π. *We will say that the points* a, b, c *are straight-line arrangement in the space* Π, *if equality* $\varphi^2(a,b,c)=1$ *is performed. If equality* $\varphi(a,b,c)=-1$ *is performed, then the angle is deployed. If equality* $\varphi(a,b,c)=0$ *is satisfied, then the angle is called the right angle. A plurality of*

points of space will be called in a straight-line arrangement if any three points of this set are straight-line arrangement.

We will say that the four points a , b , c , d *space* Π *are plane arrangement, if equality*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ is performed.}$$

We will say that the set of points of space is plane arrangement, if any four points of this set are plane arrangement.

In this paper we introduce the concept of adjacent angles:

Definition 8. Let points a , b , c *of space* Π *be a straight-line arrangement, and the angle* $\angle(a,b,c)$ *is deployed, and the point* d *of this space is such that equality* $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$ *is performed. Then angles* $\angle(a,b,d)$ *and* $\angle(c,b,d)$ *we will call adjacent ones.*

The paper presents the following results.

Lemma 1. Let points a , b , c *of space* Π *be a straight-line arrangement. For these points to be plane arrangement in this space, it is necessary and sufficient that the equality* $\varphi(a,b,c)\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) = 1$ *is performed at least for one of these points (for example, for a point* b *).*

Lemma 3. Let the angle $\angle(a,b,c)$ *is the right of space* Π. *For these points to be plane arrangement in this space, it is necessary and sufficient that the equality* $\varphi^2(a,b,d) + \varphi^2(c,b,d) = 1$ *is performed.*

Theorem 1. Let a , b , c , d *the point of space* Π, *and the angle* $\angle(a,b,c)$ *is deployed. In order for equality* $\varphi(b,a,d) = \varphi(c,a,d)$ *to be performed, it is necessary and sufficient that the angles* $\angle(a,b,d)$ *and* $\angle(c,b,d)$ *are adjacent.*

Originality. *In the work, for the first time was verified four postulates of placement, examined by V.F. Kagan, for points of metric space, which are straight-line placement. Various examples of rectilinear and flat placement of points in different metric spaces are given. Examples, which show the influence metric of the space on its geometric properties, are given.*

Conclusion. *The notion of plane placement of points in metric space is a logical generalization of the concept of their straight-line placement, which is defined by the notion of the angle between the three points of the space and its angular characteristics. The advantage of this approach to studying the structure of a metric space is its constructiveness and the ability to apply to finite sets. The results obtained in this paper give an opportunity to create a whole class of tasks that facilitate the study of the geometric properties of metric spaces. In particular, it is possible to construct straight-line and flat structures in specific metric spaces. This, in our opinion, greatly facilitates the study of metric spaces. Since the elements of the boundary transition were not used in the work, the results of the work can be used in studying the properties of elementary functions, in particular, in the school course of mathematics.*

In our opinion, further studies should continue in the direction of establishing for sets of points in the metric space concepts of similar classical notions of parallelism and perpendicularity, as well as studying the relations between them. This will enable us to apply the results obtained to the construction of the main geometric objects – flat shapes and spatial bodies in metric spaces.

Keywords: *metric space, angle, straight line, straight-line arrangement of points, plane, plane point arrangement.*

Одержано редакцією 11.09.2018 р.
Прийнято до публікації 15.09.2018 р.