

DOI 10.31651/2524-2660-2019-3-103-107

ORCID 0000-0002-9376-4346

**СЕРДЮК Зоя Олексіївна,**

кандидат педагогічних наук, доцент,  
доцент кафедри математики та методики навчання математики,  
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького  
e-mail: serdyuk\_z@ukr.net

УДК 374 : 372.851

**ФАКУЛЬТАТИВНИЙ КУРС «ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ»  
ДЛЯ УЧНІВ СТАРШОЇ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ**

*Розглядаються особливості позакласних занять з учнями 10–11 класів функціональними рівняннями, основними методами їх розв'язання та формуванням в учнів навичок і вмінь розв'язувати задачі з даної теми.*

*Пропонується система завдань до кожного заняття для перевірки теоретичних знань, з'ясування проблем у засвоєнні матеріалу та закріплення набутих знань, умінь та навичок.*

*Розкриваються методичні особливості організації факультативного курсу «Функціональні рівняння» для учнів старшої профільної школи, запропоновано структуру курсу та наведено приклади завдань.*

**Ключові слова:** факультатив; функціональні рівняння; навчання математики; профільний рівень.

**Постановка проблеми.** Освіта на сучасному етапі розвитку характеризується посиленою увагою до учня, його всебічного розвитку, уміння знайти своє місце в суспільстві, мати змогу максимально самореалізуватися в суспільстві, а тому школа однією з основних своїх цілей ставить досягнення розвитку тих здібностей особистості, які потрібні і людині, й суспільству. На жаль, інтерес до вивчення предметів природничо-математичного циклу, зокрема й математики, останні роки значно знизився. Вивчення математики учнями старших класів часто стало досить поверхневим і в більшості своїй перетворилося на курси підготовки до ЗНО. Проте одним із найважливіших завдань математичної освіти є загальний розвиток учнів, що полягає в інтенсивному формуванні в них

спроможності доказово і несуперечливо міркувати, аналізувати, порівнювати, узагальнювати тощо, загалом, уміння робити правильні висновки та будувати реалістичні прогнози.

«Зацікавити розум дитини – ось що є одним з основних положень нашої доктрини, і ми нічим не нехтуємо, щоб прищепити учневі смак, ми сказали, б навіть пристрасть до навчання», – писав видатний український, математик М. В. Остроградський.

Одним із засобів підвищення мотивації до вивчення математики та зацікавлення учнів математикою як наукою є добре продумана позакласна робота. Вона є однією з тих форм організації творчої діяльності учнів, яка дозволяє вийти за рамки лише навчальної програми та показати учням різноманіття математичних можливостей, хоча разом з цим вимагає від учнів конкретних знань, ґрунтованості, широкої обізнаності з математичних дисциплін тощо.

Зацікавити учнів математикою, показати їй могутність і красу, допомогти полюбити її – завдання кожного вчителя математики. Уміння бачити цікаве й дивуватися приносить дітям радість, породжує творчі поривання, розвиває уяву, що особливо важливо на уроках математики. Таке вміння потрібно виховувати і розвивати в учнів систематично як на уроках, так і в позакласній роботі з математики.

Тому існує нагальна потреба в удосконаленні сучасного процесу організації позакласної роботи з навчання математики, спрямованого на формування пізнавального інтересу учнів до математики як науки й до процесу її опанування як на уроках, так і в позаурочній роботі з математики.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблематика позаурочної роботи розглянута в дослідженнях І. Гончарової (методика формування евристичних умінь учнів основної школи на факультативних заняттях з математики), О. Губачова (дидактичні умови індивідуалізації допрофільної підготовки учнів основної школи), В. Загрівого (формування у старшокласників пізнавального інтересу до економічних знань у позакласній роботі), С. Захарова (формування пізнавальних інтересів учнів основної школи у процесі позакласної роботи), Л. Лутченко (організація самостійної навчально – пізнавальної діяльності учнів 7–9 класів при вивченні математики), М. Мельник (формування професійних знань учнів професійних училищ у процесі позаурочної роботи з природничо-математичних дисциплін) та інших.

**Метою статті** є розглянути особливості організації факультативного курсу «Функціональні рівняння» для учнів старшої профільної школи, спрямованого на розвиток в учнів пізнавального інтересу до математики.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Однією з ефективних форм диференційованого навчання, яка розрахована на розвиток пізнавальних інтересів, здібностей та формування професійної орієнтації учнів, оволодіння методами наукових досліджень, є факультативи. Факультативні заняття у школі проводяться з метою поглиблення знань учнів з окремих курсів, розділів чи тем навчального предмета з урахуванням інтересів і бажань учнів. Факультативи у старших класах профільної школи є своєрідним переходом від засвоєння навчального предмета до вивчення основ науки, до якої відноситься даний предмет, а також підвищенням інтересу до вивчення математики.

За змістом навчальні факультативи бувають: із поглибленого вивчення предметів; вивчення додаткових дисциплін із

набуттям спеціальності, міжпредметні факультативи. Залежно від дидактичної мети факультативи поділяються на теоретичні, практичні та комбіновані. Теоретичні факультативи проводяться з метою поглибленого вивчення складних теоретичних проблем, узагальнення та систематизації знань, умінь та навичок з тих чи тих розділів або тем предмета. Головним при цьому є: постановка, висунення гіпотез, створення проблемних ситуацій, розробка проблемних завдань, самостійність розкриття проблем з використанням аналізу та синтезу, усвідомлення головного, істотного. Методи та прийоми при цьому можуть бути як традиційними (пояснення, розповідь, бесіда), так і частково-пошуковими, дослідними (уявний експеримент, формуючий експеримент, порівняння, співставлення).

Практичні факультативні заняття проводяться з метою формування навичок і вмінь дослідницького характеру на основі поглиблення теоретичних знань. Учні при цьому виконують лабораторні роботи, навчальні завдання практичного спрямування. При цьому вчитель розкриває практичну значущість проблеми, що ставить учнів в умови пошуку шляхів її вирішення, здійснює керівництво, контроль і корекцію навчально-пізнавальної діяльності учнів; спільно з учнями обговорює результати заняття та підбиває підсумки. Особливого значення набувають завдання з альтернативними та прихованими даними; завдання на моделювання, які сприяють формуванню конструкторсько-технічних умінь учнів. Важливе значення мають завдання практичного спрямування, розв'язання яких підвищує інтерес учнів до вибору майбутньої професійної діяльності.

Комбіновані факультативні заняття проводяться у формі науково-практичної конференції, лекційно-практичного та семінарського заняття. Їх структура залежить від дидактичних завдань і припускає різні поєднання компонентів. Провідною ідеєю при проведенні комбінованих факультативів є самостійна робота учнів з літературою та іншими джерелами інформації. Різноманітність факультативів забезпечує розвиток здібностей учнів, формування вмінь винахідництва та творчості конструювання, прогнозу-

вання, розв'язання прикладних завдань, проведення експерименту та теоретичного пошуку. Усе це забезпечує високу навчальну активність учнів у процесі факультативного заняття [1].

Тема «Функціональні рівняння» в курсі математики старшої школи не розглядається, проте в деяких підручниках з поглибленого курсу алгебри зустрічаються окремі приклади функціональних рівнянь Коші, що описують деякі основні елементарні функції. Проте матеріал з даної теми є досить цікавим та корисним для тих учнів, які прагнуть поглибити свої теоретичні знання з математики, оволодіти новими практичними навичками під час розв'язування задач як з даної теми так і з інших. Також вони будуть корисними для учнів, які хочуть спробувати свої сили в різних математичних змаганнях, конкурсах, олімпіадах, оскільки завдання, що містять функціональні рівняння часто пропонують учням на таких заходах.

Нами було розроблено систему факультативних занять з теми «Функціональні рівняння» для учнів 10–11 класів. Такий факультатив можна проводити як у профільних класах природничо-математичного напрямку профілізації, так і в класах, де математика вивчається на рівні стандарту чи академічному рівні для учнів, що проявляють інтерес до ви-

вчення цього предмету. Метою факультативного курсу є ознайомлення учнів із новим для видом рівнянь – функціональними рівняннями, основними методами розв'язування таких рівнянь, формування навичок та умінь учнів розв'язувати задачі з даної теми. Також до кожного заняття розроблена система завдань для перевірки теоретичних знань учнів, система задач для відпрацювання та закріплення отриманих знань, навичок та умінь.

Курс «Функціональні рівняння» розрахований на один семестр, 16 годин. Його можна проводити з учнями, як 11, так і 10–11 класів. Пропонуємо орієнтовний план проведення даного факультативного курсу (табл. 1).

Для підготовки до факультативних занять доцільно скористатися різноманітними збірниками завдань для підготовки до олімпіад, зокрема [2; 3; 4] та інші.

Найбільш поширеним методом розв'язування функціональних рівнянь, є, звичайно, метод підстановки. Явний вигляд шуканої функції вдається визначити, вдало підбираючи значення змінних і комбінуючи знайдені співвідношення. Цей метод і називається методом підстановки. Завдання вчителя – навчити учнів добирати правильні підстановки у тих чи тих функціональних рівняннях.

Таблиця 1

Орієнтовний календарний план факультативного курсу «Функціональні рівняння»

№	Тема заняття	Кількість годин	Дата	Примітки
1	Історія виникнення та розвитку функціональних рівнянь	0,5		
2	Поняття функціонального рівняння	0,5		
3	Парність і непарність функції. Періодичність функції. Композиція функцій	0,5		
4	Найпростіші функціональні рівняння	0,5		
5	Розв'язування найпростіших функціональних рівнянь	1		
6	Спеціальні методи розв'язання функціональних рівнянь та системи функціональних рівнянь. Метод підстановок	2		
7	Розв'язування функціональних рівнянь методом підстановок	6		
8	Функціональні рівняння, що зводяться до рівняння Коші	1		
9	Аналітичний метод розв'язування функціональних рівнянь	1		
10	Розв'язування функціональних рівнянь аналітичним методом	2		
11	Підсумкове заняття	1		
	<b>Всього</b>	<b>16</b>		

Наприклад, доцільно запропонувати учням наступні завдання.

**Задача 1.** Знайти функцію  $y=f(x)$ , яка задовольняє функціональне рівняння:

$$2f(1-x)+1=xf(x) \quad (1)$$

**Розв'язання.** Припустимо, що існує функція  $f(x)$ , яка задовольняє даному рівнянню. Область визначення даної функції – множина всіх дійсних чисел. Замінюючи  $x$  на  $1-x$  (можна робити заміну, вводячи допоміжну змінну  $t$ ), одержимо:

$$2f(x)+1=(1-x)f(1-x). \quad (2)$$

Рівняння (1) та (2) містять дві змінні:  $f(x)$  та  $f(1-x)$ . Тому, склавши систему рівнянь (1)–(2) та розв'язавши її, отримаємо шуканий розв'язок даного рівняння. Отже, маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2f(1-x)+1=xf(x), \\ 2f(x)+1=(1-x)f(1-x); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1-x)=\frac{xf(x)-1}{2}, \\ 2f(x)+1=(1-x)f(1-x); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1-x)=\frac{xf(x)-1}{2}, \\ 2f(x)+1=(1-x)\frac{xf(x)-1}{2}. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи шляхом нескладних перетворень визначаємо функцію  $f(x)$ :

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}.$$

Безпосередньою перевіркою переконаємось, що одержана функція задовольняє рівняння. Для цього підставляємо знайдену функцію у рівняння (1):

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{(1-x)-3}{(1-x)^2-(1-x)+4} + 1 &= x \frac{x-3}{x^2-x+4}; \\ 2 \cdot \frac{-x-2}{x^2-x+4} + 1 &= \frac{x^2-3x}{x^2-x+4}; \\ \frac{-2x-4+x^2-x+4}{x^2-x+4} &= \frac{x^2-3x}{x^2-x+4}; \\ \frac{x^2-3x}{x^2-x+4} &\equiv \frac{x^2-3x}{x^2-x+4}. \end{aligned}$$

Остання рівність виконується при будь-яких значеннях змінної  $x$ , що й треба було довести.

$$\text{Відповідь: } f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}$$

Розглянемо приклад дещо іншої підстановки, який теж доцільно застосовувати під час розв'язування функціональних рівнянь.

**Задача 2.** Знайти функцію  $f: R \rightarrow R$ , яка задовольняє рівняння:

$$f(x^2+y)=f(x)+f(y^2).$$

**Розв'язання.** Оскільки у даному рівнянні є дві незалежні змінні:  $x$  та  $y$ , то доцільно одну з них або й дві одночасно обнулити. Тому застосуємо наступні підстановки:

1)  $x=0$ ;  $y=0$ , маємо:  $f(0)=2f(0)$ , звідки  $f(0)=0$ ;

2)  $y=0$ :  $f(x^2)=f(x)+f(0)=f(x)$ , звідки  $f(x^2)=f(x)$ . Тоді маємо  $f(x^4)=f(x^2)=f(x)$ , звідки  $f(x^4)=f(x)$ ;

3)  $y=-x^2$ :  $f(0)=f(x)+f(x^4)=f(x)+f(x)=2f(x)$ .

Підставляючи отримані у пп. 1–2 значення, отримуємо  $0=2f(x)$ , звідки  $f(x)=0$ .

**Відповідь:**  $f(x)=0$ .

**Висновки і перспективи подальших розвідок.** Даний курс дозволить учителям підготувати учнів старших класів до математичних олімпіад різних рівнів. Також можна розглядати специфіку, елементи та завдання даного курсу на практичних та лабораторних заняттях з методики навчання математики, а також на різних спецкурсах під час підготовки майбутніх вчителів математики.

Розв'язування функціональних рівнянь насамперед сприяє розвитку в учнів логічного мислення, дозволяє розвивати основні прийоми розумової діяльності тощо.

#### Список бібліографічних посилань

1. Сердюк З.О. Факультативний курс з теми «Напівправильні та зірчасті многогранники». *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ\*плюс – 2014»: матеріали Міжнародної дистанційної науково-практичної конференції* (20–21 березня 2014 р., м. Суми): У 3-х ч. Ч. 1. Суми: Мрія, 2014. С. 73–74.
2. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль, 2008. 208 с.
3. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. Навч. посіб. Київ: АСК, 2005. 344 с.
4. Готуємось до олімпіади з математики. Упорядн. А.Б. Веліховська, О.В. Гримайло. Харків: Основа, 2007. 160 с.

### References

1. Serdiuk, Z. (2014). Optional course on "Semi-regular and star-shaped polyhedra". *Development of intellectual skills and creative abilities of students and students in the course of studying the disciplines of the natural-mathematical cycle «ITM\*plus – 2014»: Materials International Remote Scientific-practical Conference*: in 3 parts. Part 1. Sumy: Mriya. 73–74. (in Ukr.)
2. Yasinsky, V. (2008). Problems of mathematical olympiads and methods of their solving. Ternopil. 208 p. (in Ukr.)
3. Sarana, O. (2005). *Mathematical Olympiads: Simple and Difficult*: [tutorial manual]. Kyiv: ASK. 344 p.
4. Preparing for the Mathematics Olympiad. In A. Velikhovskaya, O. Grimailo (Comp.). Kharkiv: Osnova, 2007. 160 p.

### SERDIUK Zoia,

PhD in Pedagogy, Associate Professor, Associate Professor of Mathematics and Teaching Methods of Mathematics Department, Bohdan Khmelnytsky National University at Cherkassy

### EXTRACURRICULAR COURSE «FUNCTIONAL EQUATIONS» FOR THE SENIOR PUPILS OF THE PROFESSION-ORIENTED SCHOOL.

**Summary.** Introduction. One of the means to raise motivation for studying Mathematics and interest in Mathematics as a science is a well thought extracurricular activity. It is one of the forms for organization of the pupils' creative activity, which allows to leave the limits of the curriculum and to show the variety of the mathematical possibilities to the pupils. At the same time it requires some particular knowledge, erudition, wide awareness in mathematical disciplines etc.

To get the pupils interested in Mathematics, to show its power and beauty, to help liking it are the task of every teacher of Mathematics. An ability to see something interesting and to be surprised brings joy for children, generates creative initiatives and develops imagination, which is especially important at the lessons in Mathematics. One should bring up and develop such pupils' ability systematically at the lessons as well as during extracurricular activity in Mathematics.

The Purpose is to consider the peculiarities for organizing the extracurricular course «Functional Equations» for the senior pupils of the profession-oriented school, intended at the development of the pupils' cognitive interest in Mathematics.

Originality. The article deals with the peculiarities in the course of the extracurricular classes on the theme

«Functional Equations» for the pupils of the 10-11 grades. The purpose of the extracurricular course is to acquaint the pupils with the new kind of equations – functional ones, the basic methods of solving such equations, formation of the pupils' skills and abilities to solve the problems on this theme. We also made up a system of tasks to every lesson for checking the pupils' theoretical knowledge, a system of problems for training and solidifying the obtained knowledge, skills and abilities.

Conclusion. In general using olympiad tasks in the extracurricular work with the senior pupils of the profession-oriented school allows to raise the pupils' interest to studying mathematics, it contributes to increasing the pupils' preparedness level to Olympiads of different levels. An appropriate choice of problems and didactically considerable organization to solve them is a pre-requisite for effective teaching Mathematics. As a result pupils' strong knowledge, skills and abilities are formed and important personal qualities are also improved.

**Keywords:** extracurricular activity; functional equation; teaching Mathematics; level for intended STEM majors.

Одержано редакцією 02.08.2019  
Прийнято до публікації 28.08.2019