ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ

DOI 10.31651/2524-2660-2019-4-48-53
ORCID 0000-0001-5387-1115

МИКАЕЛЯН Гамлет Суренович,

доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математики и методики ее преподавания,
Армянский государственный педагогический университет имени Хачатура Абовяна,
Республика Армения
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

УДК 372.851

ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ПРЕКРАСНОГО В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Показано, что как в математике, так и в процессе ее преподавания широко проявляются внешнее и внутреннее проявления прекрасного, связанные соответственно с формами и содержанием математических объектов.

Акцентировано внимание на том, что если в самой математике преобладают внутренние проявления прекрасного, то в процессе обучения на первом плане выступает внешняя сторона прекрасного.

Ключевые слова: *внешнее прекрасное; внутреннее прекрасное; признаки математического прекрасного; окружность; треугольник; четырехугольник.*

Постановка проблемы. Как в нашей повседневной жизни, так и в различных сферах человеческой жизнедеятельности прекрасное проявляется в первую очередь в внешней форме предметов и явлений. Внешнее проявление математического прекрасного, обычно, отождествляется с эстетикой внешнего вида математических объектов, и так как существует два вида внешнего проявления математических объектов (аналитический и геометрический), то естественным считается отличать форму математической записи от геометрических форм внешней эстетики математики. Необходимо отметить, что метод координат, созданный Декартом, дает возможность представить один и тот же математический объект аналитическими и геометрическими формами, и внешнее прекрасное может остаться незамеченным в одной форме представления объекта, а в другой может быть очевидным.

Подобным образом, к примеру, аналитическим способом заданная четная функция графически представлена в виде симметричной кривой по отношению к оси ординат, а нечетная функция – по отношению к точке начала координат, что придает им внешнюю эстетическую привлекательность. Подобным образом периодическая функция графически представляется в виде кривой с постоянно повторяющимися частями, что является признаком ритма и придает ей эстетическую привлекательность. Гладкость прямой или поверхности, – являющаяся признаком эстетической привлекательности, – выражает свойство дифференцируемости соответствующей функции, на что в ее аналитическом выражении не указывает ни один эстетический элемент. То же самое можно сказать о понятиях непрерывности, изогнутости и тому подобного. Заметим также, что математическая запись закономерностей физики, химии и других естественных наук – их форма, внешняя сторона способствует выявлению их сущности, внутренней структуры в рамках науки, исследующей эти закономерности.

Анализ последних исследований и публикаций. Индикаторами выявлений внешнего прекрасного математических объектов могут служить признаки математического прекрасного [1–2]. С точки зрения геометрических форм, в качестве таких признаков могут выступать симметрии и сравнения линий, фигур или тел, в частности, золотое сечение, ритм, гармония и т.д. Что касается аналитической записи формул или математических выражений, то заметим, что внешний вид, форма каждого предмета, явления призваны выражать их сущность и естественно считать прекрасным ту из различных записей одного и того же объекта, которая более всего способствует восприятию сущности объекта, пониманию процесса. С этой точки зрения, в качестве внешних признаков математического прекрасного можно принимать четкость, ясность, простату, применяемость и т.д.

Четкость математики, ее языка – однозначное, далекое от неопределенностей представление понятий и связанных с ними суждений, чего часто достигает математика благодаря использованию чрезвычайно большого количества символов. Однако, большое количество символов иногда мешает восприятию сущности математического материала. И в этом математика достигает простоты и ясности посредством специальных приемов и определенных упрощений.

Изложение основного материала исследования. Внешние и внутренние проявления математического прекрасного появляются во всем процессе обучения математике. И если в самой математике преобладают внутренние проявления прекрасного, то в процессе обучения на первый план выступает также внешняя сторона прекрасного.

Следует заметить, что внешняя эстетика математики расширяется, если в учебный материал включаются вопросы, связанные с симметрией, сравнением, золотым сечением, ритмом и гармонией. К сожалению, общеобразовательные программы по математике и учебники, написанные на их основе, не сопровождаются решением этих вопросов, обусловливающих внешнее прекрасное.

Заметим, что эстетика геометрических форм и ее влияние на учащихся, в первую очередь, обусловлена их эстетическим или точным представлением. Если в преподаваемом материале речь идет об окружности, то начертание на доске непривлекательной кривой, напоминающей окружность, не может привлекать, притягивать ученика. Я помню, как когда-то наш преподаватель практических уроков геометрии – заслуженный педагог Геворг Карагебакян, прямо на первом занятии смог покорить мысли и сердца своих учеников, мастерски изобразив на доске идеальную окружность. После этого долгое время на всех переменах мы пытались научиться чертежному мастерству нашего преподавателя посредством постоянных попыток, а на его очередных уроках с нетерпением ждали его прекрасные окружности, которые появлялись на доске с помощью сочетания превосходных поворотов его руки и кисти.

Культура графического представления зависимостей также находится в рамках решения этой же задачи. Опыт показывает, что подавляющее большинство учителей не подходят с необходимой ответственностью к задаче их представления. Графики строятся неряшливо, не принимается в расчет то, что оси координат имеют одну и ту же единицу измерения, не уделяется внимания вопросу относительно правильного представления точек пересечения с ними графиков функций и т.д. В результате, с одной стороны получаются фигуры, далекие от эстетических требований, а, с другой стороны, полученные фигуры не дают возможности ответить на те вопросы, для нахождения ответов на которые и строятся эти фигуры. Один из учителей с большим опытом работы, например, на нашем научно-методическом семинаре, строя график функции $y=\sin 2x$ не только не сохранил приблизительные пропорции чисел π и 1, а также π и $\pi/2$.

Внутренние проявления прекрасного. Помимо внешних форм предметов и явлений, прекрасное проявляется также в их внутренних структурах и содержаниях, в связях их внутренних частей, взаимоотношений с другими объектами и внешним миром. Французский философ И. Тэн обусловливает прекрасное с содержанием предмета, и, исходя из этого, видит цель искусства в выявлении признаков и внутренних закономерностей этих предметов и явлений, взаимоотношений между их частями [3]. Если взглянем с той же точки зрения также на научные явления, то, естественно, присутствующие в них внутренние закономерности также глубокие и, несомненно, имеют некую эстетическую привлекательность.

Однако, их знание, обычно, требует профессиональных навыков и соответствующей подготовки. Они недоступны непрофессионалам, которым непонятна, к примеру, самозабвенная работа математика с «черствыми» цифрами и формулами, работа, одним из важнейших стимулов осуществления которой – прекрасное, находящееся в ней, которое основывается также на внутренние закономерности явлений.

Внутреннее прекрасное проявляются в содержании математических объектов и выражается в общей архитектуре математики, составляющих ее понятий, взаимоотношений между ними: теорем и их доказательств, методов познания, применении математического языка, фактов и методов в различных областях науки. Необходимо заметить, что, в отличие от внешнего проявления, внутреннее проявление математического прекрасного видно не сразу, оно спрятано в глубине математического явления, требует определенных усилий для выявления, восприятия и понимания. В свою очередь, эти усилия, как субъективные признаки математического прекрасного, делают математический объект более прекрасным.

В случае с понятиями, внутреннее прекрасное выражается в объеме и содержании, родовой и видовой принадлежности, свойствах понятий, возможности их применения в различных областях науки.

Внутреннее прекрасное широко применяется в математических теоремах, которые выражают свойства математических понятий, присутствующие в них взаимоотношения и связи. В математических теоремах выявляются такие объективные признаки научного прекрасного, как порядок, симметрия, единство разнообразий, применяемость и т.д [2]. Одновременно математические теоремы примечательны непредсказуемостью, неожиданностью и другими субъективными признаками научного прекрасного. Эстетическая привлекательность здесь обусловлена также познанием неочевидной истины, преодолением трудных и сложных препятствий для их выявления или восприятия, осуществлением интеллектуального поиска, открытия, по мере тех усилий, которые необходимы для восприятия сущности предмета и т.д. То же самое относится и к доказательствам теорем.

Внутренняя эстетика математических объектов проявляется на всех этапах обучения математике. И на всех этих этапах внутренняя эстетика выражается объективными и субъективными признаками математического прекрасного [4]. При изучении понятий в качестве внутренней эстетики могут выступать всестороннее выявление прикладного значения необходимости введения понятия, то есть мотивации, для математических объектов и практики.

В качестве признаков проявления эстетики понятия могут выступать объективные признаки четкости, своеобразности, единства и общности разнообразий, порядка, симметрии, сравнения, ритма, гармонии, оптимальности, полезности и применяемости. В этом же процессе могут выступать также субъективные признаки неожиданности математического прекрасного, прилагаемых усилий для понимания сущности предмета, игры, интеллектуального поиска [2].

Для выявления внутренней эстетики процесса изучения теорем необходимо рассматривать теорему, как свойство какого-либо понятия или выражение связей между разными понятиями. Привлекательность полученной эстетики обусловлена разными объективными и субъективными признаками математического прекрасного. Математические и практические применения теорем – также проявления их внутренней эстетики.

Внутренняя эстетика математических объектов всем своим блеском и глубиной проявляется в математических доказательствах: не зря известный американский математик и педагог Пол Локхард именует математику искусством доказательств [1]. Аргументы, используемые в доказательствах каждой теоремы, их прочная последовательность – соответствующая цепочка шагов, связанных искусством вытекания друг из друга, не может не стать причиной эстетического удовольствия. Иногда отдельные шаги или звенья этой цепочки получаются в результате блестящих и проницательных идей человеческой мысли, параллель которых трудно представить в чувственно-эмоциональной области человека. Не зря один из великих математиков двадцатого века Андре Вейль высказался о подобной идее человеческой мысли: «Самым выдающимся творением, когда-либо созданным человеком, возможно, является рукопись Эвариста Галуа, объемом в десять страниц». А создание этого юноши двадцати одного года, которое впоследствии было названо теорией Галуа, утверждало глубокую, невообразимую связь между далекими друг от друга и трудно воспринимаемыми для того времени понятиями, что было удивительно также тем, что математическая истина обусловила также ее красотой.

Несомненно, курс математики общеобразовательной школы не может представить такие глубины математических идей, их осуществления, доказательства. Однако, здесь также доказательства, как и их методы, могут быть носителями эстетической привлекательности так как они сопровождаются объективными признаками математического прекрасного – логической строгостью, симметрией, сравнением, гармонией, а их обучение можно сопровождать такими субъективными признаками математического прекрасного, как усилия, вложенные для понимания сущности предмета, преодоление целенаправленного, сложного и трудного препятствия, интеллектуальный поиск, нахождение и изобретение.

Важным источником внутреннего проявления математического прекрасного являются математические задачи. И многие исследователи эстетику математики, в основном, связывают именно с задачами. Здесь, в качестве проявления внутренней эстетики, могут служить как объективные, так и субъективные признаки математического прекрасного [4].

Взаимоотношения внешних и внутренних проявлений прекрасного. Естественно приписывание первого вида прекрасного – внешнего, форме математических предметов и явлений, а второго вида прекрасного – внутреннего, их содержанию. Некоторые исследователи склонны считать, что внешняя красота математического объекта воспринимается независимо от внутреннего содержания.

Н. Гусева, к примеру, считает, что внешняя красота выявляется с помощью органов чувств, без активного участия мышления, однако для восприятия внутреннего прекрасного, наоборот, необходимы активные вмешательства мышления [5]. Мы считаем, что такой подход не выражает реального положения дел с достаточной полнотой. Действительно, как и в природе или искусстве, так и в науке (тем более в математике) для выявления и восприятия эстетики предмета, явления недостаточно лишь участия органов чувств. Для каждого подобного случая необходимо учитывать опыт, интуицию, способность выполнять сравнения, для чего необходимо также активное участие мышления. И вообще, форма и содержание предмета, как явления, находятся в органическом единстве. И потому понимание одного из них зависит от понимания другого.

То же относится и к прекрасному. Внутренняя и внешняя красота предмета, явления взаимосвязаны: без одной не может существовать другая, познание одной помогает выявлению знания о другой. Именно их единство позволяет полностью выявить сущность предмета, и именно их единство составляет красоту предмета, явления.

Возьмем хотя бы формулу $a^2+b^2=c^2$. Для кого-либо, далекого от математики, она ничем не примечательна. Однако, на самом деле, она выражает очень глубокую геометрическую закономерность: треугольник прямоуголен только и только в том случае, если возможно обозначить длины его сторон буквами a, b, c так, чтоб они были связаны данной формулой. Подобным образом формула $a^2+b^2<c^2$ выражает остроугольность треугольника, а формула $a^2+b^2>c^2$ – тупоугольность треугольника.

Эти закономерности наделены эстетическими признаками неожиданности, ясности и привлекательны. А без геометрической интерпретации только лишь аналитический вид этих формул не содержит эстетического значимого элемента.

Или возьмем выражение $4/3\pi R^3$. С первого взгляда – это последовательность математических символов и ничем не отличается от других подобных последовательностей. Однако еще древние математики выяснили, что этой формулой выражается или измеряется объем шара радиуса R. Именно эта закономерность вызывает интерес к данному выражению и делает его привлекательным. В свою очередь эта формула дает возможность выявить как многие свойства шара, так и его различные связи с другими телами. Они имеют следующие признаки математической эстетики: неожиданности, непредсказуемости, ясности, логической строгости и т.д., и этим делают данные выражения привлекательными.

Взаимосвязь внутренней и внешней эстетики математических объектов проявляется в школьном курсе математики на всех этапах ее преподавания. Но необходимо заметить, что возможность выступления каждого из них связана с возрастными особенностями учащихся: в младших классах, где доминирует образное мышление, значительную роль играет внешняя эстетика математических объектов. Впоследствии, параллельно с формированием и развитием логического мышления, начинает выступать и постепенно играть более значимую роль внутренняя эстетика объектов. Понятно, что в процессе преподавания математики, во-первых, проявляется внешняя эстетика объекта, и только затем – внутренняя, и они дополняют друг друга.

Взаимосвязи внешней и внутренней эстетики математических объектов подробно рассмотрим на примере из курса геометрии средней школы [4]. Его можно назвать также красотой конфигурации окружности и четырехугольника или их «любовь».

Во-первых, рассмотрим три возможных случая взаимного расположения прямой и окружности: на рис. 1, *а*) прямая не имеет с окружностью общей точки, на рис. 1, *б*) она, пересекая окружность, имея две общие точки; на рис. 1, *в*) имеет одну общую точку и является касательной окружности.

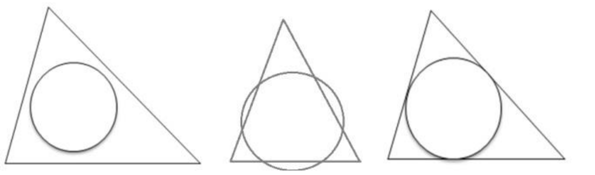
а) *б*) *в*)

Рис. 1

Какую из этих конфигураций можно считать красивой или привлекательной? Несомненно, здесь речь пока о внешней красоте. Этот вопрос предлагался студентам разных поколений и всегда получался тот же ответ: большинство считает красивым конфигурацию 1, *в*). Не спорил и сейчас не спорю, будучи уверенным, что читатель того же мнения. Не хочу даже обсуждать причину подобного подхода. Хотя, надо заметить, что подобная дискуссия может оказаться весьма интереснаой и поучительной с точки зрения развития эстетических навыков учащихся.

Для того, чтоб сделать мою речь более образной и повысить интерес студентов, я (в случае 1, *в*) говорю, что окружность и прямая «любят» друг друга.

Сейчас я хочу рассмотреть также следующие конфигурации окружности и треугольника. В этом случае мои студенты считают привлекательной конфигурацию 2, *в*), что объясняется тем, что она сводится к привлекательности взаимного расположения прямой и окружности.

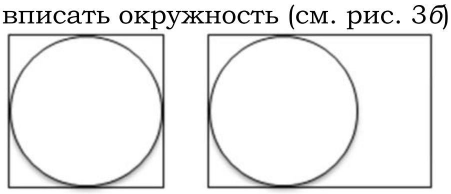


а) *б*) *в*)

Рис. 2

Действительно, стороны треугольника составляют часть прямой, которые на рис. 2, *в*) касаются окружности, что было привлекательным в предыдущем случае рис. 1, *в*). Нетрудно заметить, что для каждого треугольника есть одна окружность, которая «любит» этот треугольник, то есть все три стороны треугольника касаются окружности. В математике такая окружность называется окружностью, вписанной в треугольник. Ясно, что всякий треугольник будет любимым некоторой окружностью (а окружность будет любимой бесконечно многими треугольниками).

Рассмотрим также подобную задачу для четырехугольника. Во-первых, будет ли любой четырехугольник любимым для какой-либо окружности? Математическим языком это означает, можно ли вписать окружность в любой четырехугольник? На этот вопрос ответить очень легко. Понятно, что в квадрат всегда можно вписать окружность (см. рис. 3*а*), а в прямоугольник, который не является квадратом, невозможно вписать окружность (см. рис. 3*б*).

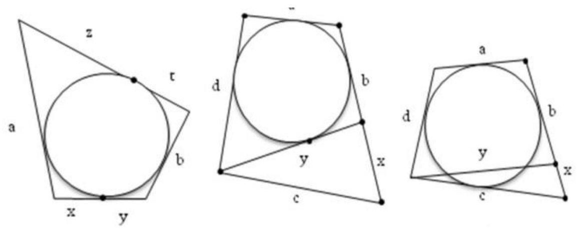


а) *б*)

Рис. 3

Естественным кажется вопрос, который касается внешней привлекательности взаимного расположения окружности и четырехугольника: какие четырехугольники «любят» окружности или, сформулировав математически, в какие четырехугольники можно вписать окружности?

Понятно, что на этот вопрос не может ответить внешняя сторона эстетики, и мы вынуждены обратиться к внутренней эстетике математических объектов. Предположим, в данный четырехугольник уже вписана окружность так, как показано на чертеже 4, *а*). Из чертежа и из свойства равенства двух касательных отрезков, проведенных к окружности из данной точки, следует $a=x+z$, $b=y+t$ и, следовательно, $a+b=(x+y)+(z+t)$, что означает, что суммы противоположных сторон четырехугольника равны. То есть, если в четырехугольник можно вписать окружность, то обязательно суммы пар противоположных сторон будут одинаковы.



а) *б*) *в*)

Рис. 4

А может именно это свойство четырехугольника – причина вписываемости в него окружности? Попробуем обсудить эту версию.

Предположим, суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то есть $a+c=b+d$. Попробуем показать, что в него можно вписать окружность.

Для любого четырехугольника можно провести окружность, касающуюся его трех сторон, для чего достаточно найти точку пересечения биссектрис соседних углов, которая и будет центром данной окружности. Если для нашего четырехугольника провести такую окружность, то она или будет касаться также четвертой стороны четырехугольника, то есть примет вид 4, *а*), или примет вид 4, *б*), или же 4, *в*).

Воспользовавшись этим условием, а также известным фактом, что если четырехугольник вписываемый, то суммы противоположных пар сторон одинаковы, в случае вариантов 4, *б*) и 4, *в*) получим $a+c=d+b+x$, $a+y=d+b$, откуда получим формулу $x+y=c$, что неверно, так как x, y, и c – длины сторон одного и того же треугольника. Значит, остается случай касания, т.е. 4, *а*).

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, внешне кажущееся красивым взаимное расположение окружности и четырехугольника характеризуется также наличием внутренней красивой связи между соответствующими понятиями. И, наоборот, взаимное расположение окружности и четырехугольника, характеризующееся внутренней красивой связью, имеет также внешнюю эстетическую привлекательность.

Список библиографических ссылок

1. Локхард П. Плач математика. URL: www.livelib.ru/book/1000487179.
2. Микаелян Г.С. Прекрасное и математика. Ереван: Эдит Принт, 2014 (на арм. языке).
3. Тэн И. Философия искусства, М. 1996.

4. Микаелян Г.С. Прекрасное и образовательный потенциал математики. Ереван: Эдит Принт, 2015 (на арм. языке).
5. Гусева Н.В. Теоретические и методические основы раскрытия эстетического потенциала школьного курса математики в 5–6 классах: дис. … канд. пед. наук. Арзамас, 1999. 212 с.

References

1. Lockhardm, P. Crying Mathematics. Retrieved from www.livelib.ru/book/1000487179.
2. Mikaelian, H.S. (2014). Beauty and mathematics. Yerevan: Edith Print. (in Arm.).
3. Taine, H.A. (1996). Philosophy of Art. Moscow (in Rus.).
4. Mikaelian, H.S. (2015). Beauty and educational potential of mathematics. Yerevan: Edith Print. (in Arm.).
5. Guseva, N.V. (1999). Theoretical and methodological foundations of disclosing the aesthetic potential of schoolchildren of o course of mathematics in grades 5–6 (PhD Dissertation). Arzamas. 212 p.

MIKAELIAN Hamlet,
Doctor Science in Pedagogy, PhD in Physics and Mathematics, Professor,
Head of Mathematics and Methods of Its Teaching Department,
Khachatur Abovyan Armenian State Pedagogical University, Republic of Armenia

EXTERNAL AND INTERNAL MANIFESTATIONS BEAUTY IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS

Summary. *Both in everyday life and in different areas of life, the beautiful is manifested primarily in the external form of objects and phenomena. The external manifestation of mathematical beauty is usually identified with the aesthetics of the appearance of mathematical objects, and since there are two types of external manifestations of mathematical objects: analytical and geometric, it is natural to distinguish the form of mathematical writing from the geometric forms of external aesthetics of mathematics.*

Indicators of identifying the external beautiful of mathematical objects can serve as signs of mathematical beautiful. From the viewpoint of geometric forms, as aesthetic signs can act symmetry and comparison of lines, figures or bodies, in particular, the golden section, the rhythm, the harmony, etc. As for the analytical writing of formulas or mathematical expressions, we note that the appearance, the shape of each object is intended to express their essence and it is natural to consider as wonderful that from various records of the same object, which most of all contributes to the perception of the essence of the object, understanding the process . From this point of view, one can take clarity, prostate, applicability, etc., as external signs of mathematical beauty.

In addition to the external forms of mathematical objects and phenomena, the beauty is also manifested in their internal structures and contents. For beauty in mathematics, researchers proceed from the relationship of the objects, their relationship with the outside world. It should be noted that, in contrast to the external manifestation, the internal manifestation of mathematical beauty is not immediately visible, it is hidden in the depths of a mathematical phenomenon, it requires some effort to identify and perception. In turn, these efforts, as the subjective signs of mathematical beauty, make the beauty, expressed in the objects content, more attractive.

External and internal manifestations of mathematical beauty appear in the whole process of learning mathematics. And if in the mathematics itself the internal manifestations of the beautiful prevails, then in the learning process, the external side of the beautiful also appears in the foreground.

It should be noted that the possibilities of each of them is related to the age characteristics of students: in the lower grades, where figurative thinking dominates, the external aesthetics of mathematical objects play a significant role. In parallel with the formation and development of logical thinking, the internal aesthetics of objects begins to act and gradually play a more significant role. It is clear that in the process of teaching mathematics, first, the external aesthetics of the object manifests itself, and only then the internal aesthetics, and they complement each other.

In this work we consider an example from a high school geometry course. It can also be called "The beauty of the configuration of the circle and quadrangle or their "love".

Keywords: *external beautiful; internal beautiful; signs of mathematical beautiful; circle; rectangle; quadrilateral.*

Одержано редакцією 24.09.2019
Прийнято до публікації 23.10.2019