DOI 10.31651/2524-2660-2019-4-53-58

ORCID 0000-0002-7829-4534

ТРЕТЯК Наталія Петрівна,

вчителька математики,
Спеціалізована школа І–ІІІ ступенів № 17 Черкаської міської ради Черкаської області
e-mail: nataliia.tretiak70@gmail.com

ORCID 0000-0002-5351-2961

КОЛОМІЄЦЬ Анна Олегівна,

студентка факультету інформатики та обчислювальної техніки,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
e-mail: anyakolomiec00@gmail.com

УДК 373.5.016:514.7(045)

ДОСЛІДЖЕННЯ $\frac{1}{k}$–ПРЯМОЇ ТРИКУТНИКА

Описано результати дослідження кількості прямих, що поділяють площу трикутника навпіл, які було представлено у дослідницькій роботі Малої академії наук.

Ключові слова: *навчання учнів геометрії; площа трикутника.*

Постановка проблеми. Більшість чудових відкриттів у геометрії так чи інакше пов'язані з трикутником. Крилату фразу Козьми Пруткова «Ніхто не обійме неосяжного» в повній мірі можна віднести до геометрії трикутника. У шкільному курсі планіметрії розв'язується цілий ряд задач на поділ площі трикутника навпіл за заданими умовами [1; 2]. Залежно від умов задача може бути простою або дослідницького характеру. Прикладом дослідницької задачі є задача про пошук прямої, яка поділяє периметр і площу трикутника навпіл [1–6]. Нас зацікавило узагальнення цієї задачі – чи можна з'ясувати кількість прямих, які проходять через точку трикутника і поділяють його площу у відношенні 1:(k–1) ($k\geq 3$, $k\in N$). Такі прямі називатимемо $\frac{1}{k}$– прямими трикутника.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Трикутник вивчали ще в давні часи (Архімед, Ван-Обель, Ейлер, Герон, Менелай, Піфагор, Птолемей, Чева та ін.). Геометрія трикутника жива й до сьогодні – виводяться нові й нові властивості трикутника (Ж. Адамар, Г.П. Бевз, С.І. Зетель, І.А. Кушнір, В.М. Лейфура, В.Ю. Протасов, І.Ф. Шаригін, В.А. Ясінський та ін.).

Мета статті – дослідити кількість $\frac{1}{k}$-прямих трикутника.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нехай у ΔABC $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Нехай P – деяка точка трикутника ABC, FK – $\frac{1}{k}$–пряма, яка проходить через точку P. Можливі три випадки: 1) пряма FK перетинає сторони AC і AB; 2) пряма FK перетинає сторони AB і BC; 3) пряма FK перетинає сторони AC і BC. Для кожного випадку необхідно розглядати прямі, які відтинають від ΔABC трикутник площі $\frac{1}{k}S_{ABC}$, так і прямі, які відтинають від ΔABC чотирикутник площі $\frac{1}{k}S_{ABC}$. У дослідженні трикутника скористалися методом координат [7].

<u>Перший випадок</u>: пряма FK перетинає сторони AC і AB (рис. 1). Виберемо на площині косокутну систему координат так, щоб $A(0;\ 0)$, $B(0;\ c)$, $C(b;\ 0)$. Нехай $P(u;\ v)$ – довільна точка трикутника ABC.

<u>Випадок 1.1.</u> $\frac{1}{k}$–пряма KF відтинає від ΔABC трикутник, площа якого дорівнює $\frac{1}{k}S_{ABC}$.

$$\text{Тоді } \frac{1}{k}AF\cdot FK\cdot\sin A=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A,$$

$\frac{1}{k}mAB\cdot pAC\cdot\sin A=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$. Маємо $p=\frac{1}{km}$, $AK=mAC$, $AF=pAB$. Тоді $\frac{1}{k}\leq p\leq 1$, $\frac{1}{k}\leq m\leq 1$.

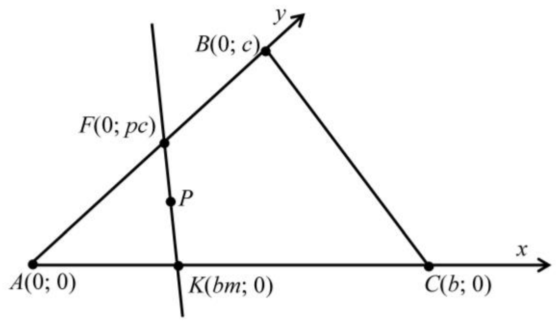

Рис. 1

Запишемо рівняння прямої KF: kbm^2y–$cbm+cx=0$. Оскільки точка P належить прямій KF, то: $kbm^2v-cbm+cu=0$. Якщо $v=0$ (точка P належить стороні AC), то існує одна $\frac{1}{k}$–пряма за умови $\frac{1}{k}\leq m\leq 1$. Якщо $v\neq 0$, то рівняння $kbm^2v-cbm+cu=0$ є квадратним. В залежності від значення дискримінанту, може існувати або одна, або дві шукані прямі або не існуватиме такої прямої (рис. 2).

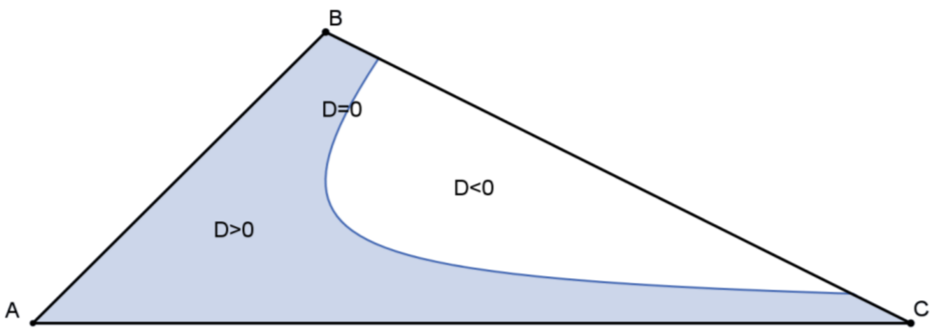

Рис. 2

$D=c^2b^2-4kcbuv\geq 0$, тоді $cb-4kuv\geq 0$.

$D=0$, $cb=4kuv$. За умови, що $\frac{b}{2k}\leq u\leq\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2k}\leq v\leq\frac{c}{2}$ маємо дугу гіперболи $u=\frac{cb}{4kv}$. Якщо точка P належить вказаній дузі гіперболи, то існує одна $\frac{1}{k}$–пряма точки P.

$D>0$, $cb>4kuv$. Якщо координати точки P трикутника задовольняють нерівність $cb>4kuv$, то можуть існувати дві шукані прямі.

Рівняння матиме два розв'язки, які належать проміжку $\left[\frac{1}{k},1\right]$, якщо $\begin{cases} kbv-cb+cu\geq 0; \\ bv-cb+kcu\geq 0; \\ \frac{c}{2k}<v<\frac{c}{2}. \end{cases}$

Отже, якщо координати точки P задовольняють систему, то існує дві $\frac{1}{k}$–прямі точки P.

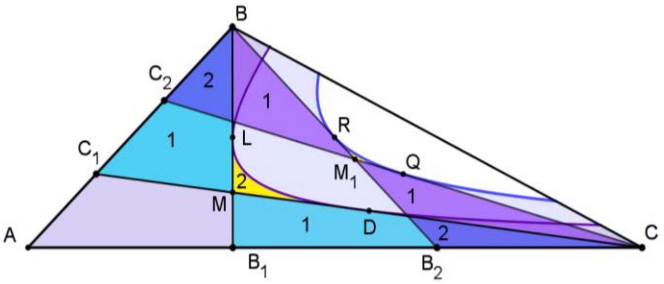

Рис. 3

На рисунку 3 зображено криволінійний трикутник LMD, якому належать такі точки P.

Рівняння матиме один розв'язок, який належить проміжку $\left[\frac{1}{k},1\right]$, якщо $\begin{cases} kbv-cb+cu\geq 0, \\ bv-cb+kcu\leq 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} kbv-cb+cu\leq 0, \\ bv-cb+kcu\geq 0. \end{cases}$ Отже, якщо координати точки P задовольняють сукупність цих систем, то існує одна шукана пряма. На рисунку 3 зображено трикутники C_1BM і MB_1C, яким належать точки P, через які проходить одна $\frac{1}{k}$–пряма.

<u>Випадок 1.2.</u> $\frac{1}{k}$–пряма KF відтинає від трикутника ABC чотирикутник, площа якого дорівнює $S=\frac{k-1}{k}S_{ABC}$. Тоді $p=\frac{k-1}{km}$, $1\leq m\leq\frac{k-1}{k}$, $1\leq p\leq\frac{k-1}{k}$. $AK=mAC$, $AF=\frac{k-1}{km}AB$.

Запишемо рівняння прямої KF:

$$\frac{x-0}{bm-0}=\frac{y-\frac{(k-1)c}{km}}{0-\frac{(k-1)c}{km}},$$

звідси $kbm^2y-cb(k-1)m+c(k-1)x=0$. Оскільки точка P належить прямій KF, то $kbm^2v-cb(k-1)m+c(k-1)u=0$.

1. Якщо $v=0$, тобто точка P належить стороні AC, то існує одна $\frac{1}{k}$–пряма за умови $\frac{k-1}{k}\leq m\leq 1$.

2. $D=c^2b^2(k-1)^2-4k(k-1)cbuv\geq 0$, $cb(k-1)-4kuv\geq 0$.

2.1. $D=0$. За умови, що $\frac{b(k-1)}{2k}\leq u\leq\frac{b}{2}$, $\frac{c(k-1)}{2k}\leq v\leq\frac{c}{2}$ маємо дугу гіперболи $u=\frac{cb(k-1)}{4kv}$.

2.2. $D>0$, $cb(k-1)-4kuv>0$. Рівняння матиме два розв'язки, які належать проміжку $\left[\frac{k-1}{k},1\right]$, якщо

$$\begin{cases} kbv-(k-1)cb+(k-1)cu\geq 0, \\ (k-1)bv-cb(k-1)+kcu\geq 0, \\ \frac{c(k-1)}{2k}<v<\frac{c}{2}. \end{cases}$$

Отже, якщо координати точки P задовольняють цю систему (точка P належить криволінійному трикутнику RM_1Q), то існує дві шукані прямі (рис. 3).

Рівняння матиме один розв'язок, який належить проміжку $\left[\frac{k-1}{k},1\right]$, якщо

$$\begin{cases} kbv-(k-1)cb+(k-1)cu\geq 0, \\ (k-1)bv-cb(k-1)+kcu\leq 0 \end{cases}\text{ або}$$

$$\begin{cases} kbv-(k-1)cb+(k-1)cu\leq 0, \\ (k-1)bv-cb(k-1)+kcu\geq 0. \end{cases}$$

Якщо координати точки P задовольняють сукупність цих систем, тобто точка P належить трикутникам C_2BM_1 і M_1B_2C, то існує одна шукана пряма (рис. 3). Загальні результати для випадку 1 подано на рисунку 3.

У <u>другому</u> та <u>третьому випадках</u> міркування будуть аналогічними, як і у першому випадку. Підсумуємо результати усіх трьох випадків. Для точки P, яка лежить на стороні трикутника, існує дві $\frac{1}{k}$–прямі. Для точок P трикутника кількість $\frac{1}{k}$–прямих позначено на рисунках 4–5 символами ▲ і ♦. Символом ▲ позначено область, через кожну точку якої проходить $\frac{1}{k}$–пряма, яка відтинає від даного трикутника, трикутник площі $\frac{1}{k}S_{ABC}$. Символом ♦ позначено область, через кожну точку якої проходить $\frac{1}{k}$–пряма, яка відтинає від даного трикутника, чотирикутник площі $\frac{1}{k}S_{ABC}$.

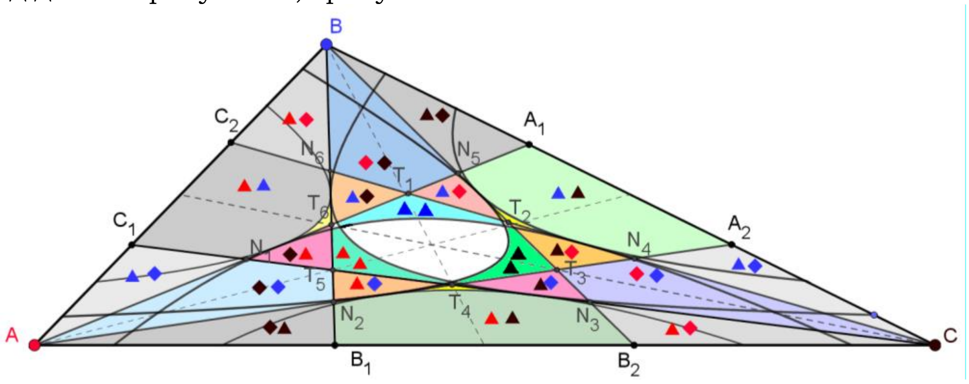

Рис. 4

Так через кожну точку чотирикутника $BN_6T_1N_5$ проходить дві $\frac{1}{k}$–прямі: пряма, яка перетинає сторони AC і AB, і пряма, яка перетинає сторони AC і BC. Зауважимо, що через кожну точку області, яку обмежують гіперболи (на рисунку 4 така область не виділена кольором), не проходить ні одна $\frac{1}{k}$–пряма. З'ясовано, що точки T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 і T_6 є точками перетину відрізків AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 і належать медіанам трикутника.

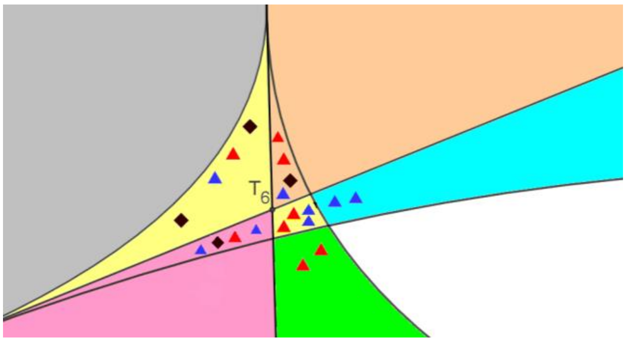

Рис. 5

Кількість $\frac{1}{k}$–прямих в околі точки T_6 проілюстровано на рисунку 5. Така ж кількість шуканих прямих і в околах точок T_2 і T_4.

Отже, $\frac{1}{k}$–прямих для точки трикутника може бути або чотири, або три, або дві, або одна, або взагалі їх не бути.

У ході дослідження з'ясовано, що $\frac{1}{2}$–пряму доцільно дослідити окремо.

$\frac{1}{2}$–пряма проходить через точку трикутника і поділяє його площу навпіл.

Для точки P, яка лежить на стороні трикутника, існує одна $\frac{1}{2}$–пряма. Якщо точка P належить криволінійному трикутнику ZRD (без точок його сторін), то існує три $\frac{1}{2}$–прямі (рис. 6). Через кожну з точок Z, R, D проходить одна $\frac{1}{2}$–пряма.

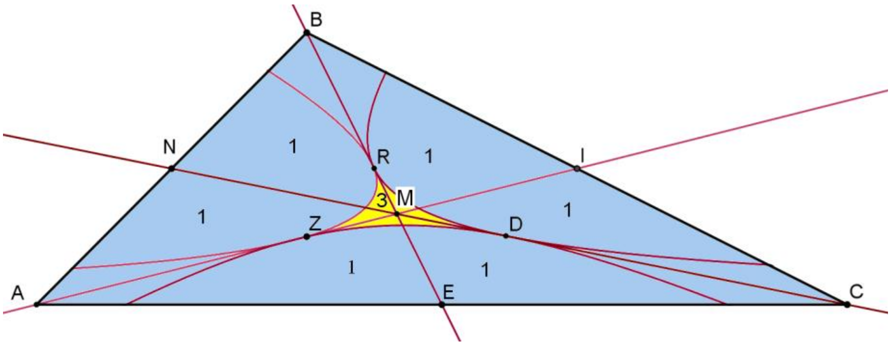

Рис. 6

Якщо точка P належить сторонам криволінійного трикутника ZRD (без вершин), то існує дві $\frac{1}{2}$–прямі. Через інші точки трикутника ABC проходить одна $\frac{1}{2}$–пряма.

Для точки P, яка лежить на стороні трикутника, існує одна $\frac{1}{2}$–пряма. Якщо точка P належить криволінійному трикутнику ZRD (без точок його сторін), то існує три $\frac{1}{2}$–прямі (рис. 6). Через кожну з точок Z, R, D проходить одна $\frac{1}{2}$–пряма. Якщо точка P належить сторонам криволінійного трикутника ZRD (без вершин), то існує дві $\frac{1}{2}$–прямі. Через інші точки трикутника ABC проходить одна $\frac{1}{2}$–пряма.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Нами системно досліджено кількість прямих, які проходять через точку трикутника і поділяють його площу у відношенні $1:(k-1)$, де $k\geq 3$, $k\in N$.

З'ясовано, що $\frac{1}{k}$–прямих може бути не більше чотирьох. $\frac{1}{2}$–пряму можна провести для будь-якої точки трикутника, взагалі їх може бути або три, або дві, або одна. Робота може бути цікавою для учнів, які захоплюються математикою, та використана учителями на уроках, факультативах, гуртках з математики.

Список бібліографічних посилань

1. Мерзляк А.Г. Геометрія: Підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія, 2009. 198 с.
2. Мерзляк А.Г. Геометрія: Підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія, 2009. 272 с.
3. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Москва: Учпедгиз, 1948. 608с.
4. Кушнир И.А. Геометрия на баррикадах 2. Київ: Знання України, 2011. 832 с.
5. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013–2014 (за ред. Б. В. Рубльова). Харків: Гімназія, 2015. 465 с.
6. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии, 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука, 1986. 224 с.
7. Борисенко О.А. Аналітична геометрія: навч. посіб. для ун-тів. Харків: Основа, 1993. 192 с.

References

1. Merzlyak A. (2009). Geometry: A textbook for 8th grade general education institutions. Harkiv: Himnaziya, 198 p.
2. Merzlyak A. (2009). Geometry: A textbook for 9th grade general education institutions. Harkiv: Himnaziya, 272 p.
3. Adamar G. (1993). Elementary geometry. Moscow: Uchpedhis, 608 p.
4. Kushnir A. (2011). Barricade Geometry. Kyiv: Znannya Ukrainy, 832 p.
5. Mathematical Olympiad Competitions of Schoolch - ldren of Ukraine: 2013–2014 (2015). In Rubl'ov (Ed.). Harkiv: Himnaziya, 465 p.
6. Sharygin I. (1986). Problems in geometry, 2nd edition. Moscow: Nauka, 224 p.
7. Borysenko O. (1993). Analytical geometry: a textbook for universities. Harkiv: Osnova, 192 p.

TRETIAC Natalia,
Mathematics Teacher,
Specialized School 1–3 degrees No 17 of Cherkasy City Council of Cherkasy Region

KOLOMIETS Anna,
Student of Information Technology and Computer Science Faculty,
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

THE RESEARCHING OF $\frac{1}{k}$ – TRIANGLE'S STRAIGHT LINE

***Summary**. Introduction. The school course in planimetrics includes a number of arithmetic problems to do with the division of a triangle in half according to the given conditions.*

The problem may be either easy-fetched or of research nature. The sum of searching for a straight line that divides both triangle's perimeter and area in half is known to be an example of a research-nature arithmetic problem. We got interested in generalization of this problem – whether it is possible to find out the number of straight lines that pass through the point of a triangle and divide its area in relation of $1:(k-1)$, $(k\geq 3,\ k\in N)$. *Such lines will be called* $\frac{1}{k}$ *– triangle's straight lines.*

Purpose: to work out a research of the number of $\frac{1}{k}$ *–triangle's straight lines.*

Methods. To do the research work the coordinate method was used.

Results. Providing that P is a point of the triangle ABC, FK – $\frac{1}{k}$ *–straight line that passes through the point P. The possible cases are: the straight line FK crosses the sides AC and AB; the straight line FK crosses the sides AB and BC.*

For each case it is necessary to consider straight lines which detach from ABC the triangle area of $\frac{1}{k}S_{ABC}$*, as well as the straight lines that detach from ABC the quadrangle area* $\frac{1}{k}S_{ABC}$.

The research revealed that the $\frac{1}{2}$ *– straight line's research must be carried out separately. Originality. Similar conditions have been derived under which it is possible to get* $\frac{1}{k}$ *–straight lines for the given triangle.*

Conclusion. We have worked out systematic and complete research of the number of straight lines that pass through the point of the triangle and divide its area in relation $1:(k-1)$*, where* $k \geq 3$*,* $k \in N$*. We have found out that the quantity of straight lines cannot exceed four.* $\frac{1}{2}$*–straight line is a straight line that can be made for any point of the triangle, in general there can be either three, two or one points. The work can be of interest for students who are keen on mathematics, it can also be used by the teachers who conduct lessons, collectives and math circles.*

Keywords: *teaching students geometry; triangle area.*

Одержано редакцією 12.11.2019
Прийнято до публікації 03.11.2019