DOI 10.31651/2524-2660-2019-4-72-76
ORCID 0000-0003-4008-3990

КОЛОМІЄЦЬ Оксана Миколаївна,

кандидатка педагогічних наук, доцентка кафедри математики та методики навчання математики,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: ok_kolomiec71@ukr.net

ORCID 0000-0002-9059-8506

БРИНЬКО Олена Іванівна,

магістрантка кафедри математики та методики навчання математики,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: el.brynko@ukr.net

УДК 378.016:514.7]-047.37(045)

ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ У СТУДЕНТІВ ЗВО ПІД ЧАС НАВЧАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ (ТЕОРІЇ КРИВИХ)

Схарактеризовано досвід формування у студентів дослідницьких умінь при навчанні диференціальної геометрії, зокрема, дослідженні геометричних місць точок у теорії кривих.

Ключові слова: *навчання студентів геометрії; дослідницькі уміння; геометричне місце точок.*

Постановка проблеми. Одним із найважливіших завдань математичної освіти є залучення студентів до дослідницької роботи. Адже саме такий вид діяльності розвиває в студентів інтуїцію, критичне мислення, творчу уяву. Це забезпечує ефективне засвоєння та використання знань, закладає основи науково-дослідної роботи, залучає до наукових досліджень і розв'язання виробничих, економічних та соціальних завдань, розвиває здатність до самостійних обґрунтованих суджень та висновків, дозволяє використовувати самостійно здобуті наукові знання у динамічному середовищі господарювання підприємств, науково обґрунтовувати результати власної діяльності тощо [1, с. 635].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Психолого-педагогічні передумови формування дослідницьких здібностей, дослідницьких умінь подано в роботах В. Андреєва, А. Воробйова, І. Ільясова, Ф. Орєхова, В. Попова, В. Стрельської, І. Усачова. Методичні аспекти формування дослідницьких умінь в учнів та студентів розглянуто у працях Л. Кареліної (навчання учнів геометрії), Г. Колінець (навчання старшокласників математики), Г. Лиходєєвої (навчання учнів елементів стохастики), О. Первун (навчання учнів математики), А. Рибалко (навчання студентів фізики та астрономії), Н. Тарасенкової (навчання учнів математики), З. Чухрай (навчання математики студентів коледжів) та ін. Проте, поза увагою залишилося вивчення методичних аспектів формування у студентів дослідницьких умінь під час навчання диференціальної геометрії.

Мета статті – з'ясувати можливості теорії кривих курсу диференціальної геометрії у формуванні у студентів дослідницьких умінь.

Виклад основного матеріалу дослідження. Дослідницькі вміння визначають як сукупність систематизованих знань, умінь і навичок особистості, поглядів і переконань, які визначають функціональну готовність студентів до творчого пошукового розв'язання пізнавальних задач [2, с. 56].

В. І. Андрєєв виділяє дві групи дослідницьких умінь:

1) операційні уміння (уміння спостерігати, порівнювати, аналізувати, синтезувати, абстрагувати, узагальнювати, структурувати і систематизувати матеріал, класифікувати, виділяти головне, застосовувати аналогію, робити індуктивні і дедуктивні висновки, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, застосовувати знання і вміння в новій ситуації, виявляти проблему, висувати гіпотезу, бачити різні підходи до вирішення проблеми і знаходити оптимальний спосіб її рішення, прогнозувати і оцінювати результат);

2) технічні уміння (уміння працювати з літературою: конспектувати, анотувати, реферувати, складати бібліографію і використовувати її; підбирати необхідний для дослідження матеріал, організовувати експеримент, описувати отриманий експериментальний матеріал, робити висновки і оформляти результати свого дослідження у формі доповіді, реферату, статті) [3, с. 97].

Дослідницькі уміння відносять до загальнонавчальних, вони формуються в процесі дослідницької діяльності під час навчання студентів всіх дисциплін. Оскільки для формування дослідницьких умінь важливим є не об'єктивний результат, а набуті уміння, то доцільним є залучення студентів спочатку до навчально-дослідницької діяльності під час вивчення тієї чи іншої дисципліни, а потім до науково-дослідницької діяльності під час написання магістерської роботи. Навчально-дослідницька робота, на відміну від науково-дослідницької діяльності, передбачає відкриття суб'єктивно нових знань.

Диференціальна геометрія має великі можливості для формування у студентів навчально-дослідницьких умінь, оскільки у курсі диференціальної геометрії вивчаються способи утворення кривих і поверхонь та досліджуються їх властивості.

Під час вивчення геометрії важливим є не тільки предметний зміст, його логічна організація, але й специфіка оболонок, у які загортається цей геометричний зміст. Як показує практика викладання геометрії у ЗВО, несформованість семіотичного аспекта предметних знань є однією з причин виникнення утруднень у студентів під час розв'язування геометричних задач. Лише тоді, коли зміст і форма математичних абстракцій виступає для студентів у діалектичному поєднанні, можна говорити про свідоме засвоєння змісту [4, с. 59; 5, с. 238].

Оболонки, у які загортається геометричний зміст, поділяють за двома основами: а) на *вербальні* (терміни, символіка, математичні речення, тексти задач тощо) та *невербальні* (графічні та змістово-графічні інтерпретації, аналітичні конфігурації, макети, ілюстрації тощо); б) на *розгорнуті* (об'єктні тексти – означення понять, формулювання теорем, правил тощо) та *згорнуті* (терміни, символіка, змістово-графічні інтерпретації тощо) [5, с. 247].

Поняття і факти курсу диференціальної геометрії потребують синхронного загортання їх змісту у різні оболонки [4, с. 62]. Наприклад: «астроїда є еволютою еліпса» (твердження загорнуто у розгорнуту вербальну оболонку); $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$ (астроїду загорнуто у згорнуту невербальну оболонку). Отже, у студентів під час навчання диференціальної геометрії семіотичні уміння мають формуватися цілеспрямовано і систематично, що є необхідною умовою формування у них навчально-дослідницьких умінь.

Значна кількість задач курсу диференціальної геометрії є задачі на знаходження геометричних місць точок. Під геометричним місцем точок (ГМТ) розуміють геометричну фігуру як множину точок, що володіють деякою властивістю.

До початку XX ст. криву не розглядали як нескінченну множину точок; скоріше її розглядали як об'єкт, на якому може бути розташована точка, або яким ця точка переміщується. Наприклад, еліпс є геометричним місцем точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок є величина стала і більша за відстань між заданими точками. На сьогодні теорія множин є фундаментальним поняттям математики, тому термін «ГМТ» став старомодним, однак ще доволі вживаним.

Згідно програм [7–8], ГМТ вивчаються у школі у 7–11 класах. Надалі студенти математичних спеціальностей продовжують знайомитися у курсі аналітичної геометрії з новими ГМТ (еліпс, гіпербола, парабола тощо). Оскільки такі ГМТ описуються рівняннями першого або другого порядку (їх системами), то основними методами їх дослідження є координатний та векторний методи.

Наведемо приклад розв'язання задачі методом координат.

Задача 1. Дано прямокутний трикутник ABC, $\angle C=90°$. Знайдіть множину точок M площини трикутника, для яких $AM^2+BM^2=2CM^2$.

Розв'язання.

1. Введемо прямокутну декартову систему координат на площині так, щоб початок координат містився в точці C, а відрізок CA лежав на осі OX (рис. 1). Тоді $C(0; 0)$. Нехай точки A і B матимуть координати: A $(a; 0)$, B $(0; b)$.

2. Нехай M $(x; y)$ – деяка точка, що належить шуканому ГМТ площини.

3. Запишемо умову $AM^2+BM^2=2CM^2$ в координатній формі:

$$AM^2=(x-a)^2+(y-0)^2=(x-a)^2+y^2;$$
$$BM^2=(x-0)^2+(y-b)^2=x^2+(y-b)^2;$$
$$CM^2=(x-0)^2+(y-0)^2=x^2+y^2;$$
$$(x-a)^2+y^2+x^2+(y-b)^2=2(x^2+y^2).$$

4. Спростивши рівняння $(x-a)^2+y^2+x^2+(y-b)^2=2(x^2+y^2)$, отримуємо $2xa+2yb-(a^2+b^2)=0$.

Маємо рівняння прямої, яка проходить через точку $H\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ – середину гіпотенузи AB.

5. Отже, геометричним місцем точок M площини є пряма що проходить через середину гіпотенузи трикутника ABC перпендикулярно до медіани CH (рис. 2).

Цю ж задачу можна розв'язати і векторним методом.

Розв'язання.

1. За базис виберемо вектори $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$. Вектор $\overrightarrow{CM}$ – радіус-вектор деякої точки, що належить ГМТ (рис. 3).

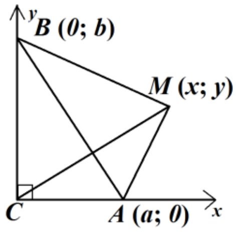

Рис. 1

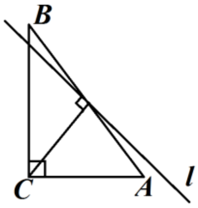

Рис. 2

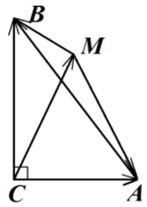

Рис. 3

2. З трикутника ABC можемо записати: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}$. Тоді згідно умови $\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}\right)^2+(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB})^2=2\overrightarrow{CM}^2$.

3. $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2)$. Оскільки $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})\neq\vec{0}$, то отримане рівняння задає пряму l. Але $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CH}$, де H – середина гіпотенузи AB. Тому маємо $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$.

4. Отже, шуканим ГМТ є пряма l, що проходить через середину гіпотенузи трикутника ABC перпендикулярно до медіани CH (див. рис. 2).

Ще більші можливості для дослідження ГМТ надає теорія диференціального числення. У курсі диференціальної геометрії студенти мають змогу досліджувати криві, які описуються алгебраїчними рівняннями вищих порядків, трансцендентними рівняннями. На нашу думку, формування навчально-дослідницьких умінь у студентів на прикладі досліджень ГМТ має відбуватися у три етапи. На першому етапі студентів доцільно ознайомити з відомими, класичними ГМТ (подерами, еволютами, евольвентами тощо), виділити етапи їх знаходження, розглянути методи їх знаходження. Студентам пропонуємо наступні завдання.

Завдання 1. Дайте визначення астроїди (декартового листа, строфоїди, циклоїди, кардіоїди тощо) як геометричного місця точок.

Завдання 2. Дослідіть подеру параболи (розгляньте різні випадки розміщення точки відносно параболи), еволюту параболи, евольвенту параболи.

Студентам слід зауважити, що ГМТ визначаються певними вихідними даними. Наприклад, коло визначається точкою і заданою відстанню, парабола — точкою і прямою, еліпс і гіпербола — двома точками та заданою відстанню. Водночас еліпс, гіпербола, парабола або будь-яка інша крива, можуть виступати як вихідні дані для побудови нових ГМТ. Так геометричним місцем основ перпендикулярів, опущених з вершини параболи на дотичні до параболи, є цисоїда.

На другому етапі формування у студентів навчально-дослідницьких умінь доцільно повідомити студентів про способи утворення нових кривих, використовуючи вже відомі ГМТ.

Разом зі студентами на занятті розв'язуємо задачу: «Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які проходять через фокус параболи $y^2=2px$ і дотикаються до неї в заданій точці M». Шуканим ГМТ є крива, що описується рівняннями

$$\begin{cases} x=\dfrac{-3t^4-4t^2p^2-p^4}{-4t^2p-4p^3}, \\ y=\dfrac{-2t^3p^3-3tp^4+t^5}{-4p^4-4t^2p^2}, \end{cases}$$

досліджуючи які, отримуємо зображення шуканого ГМТ (рис.4).

При цьому для домашнього завдання доцільно студентам запропонувати у даному ГМТ замінити параболу на еліпс та дослідити отримане ГМТ.

Нове ГМТ також можна отримати шляхом заміни властивості, якою володіють точки відомого (заданого) ГМТ або її узагальнення. Наприклад, ГМТ площини, з яких параболу видно під прямим кутом (ортооптична крива параболи), є директриса параболи.

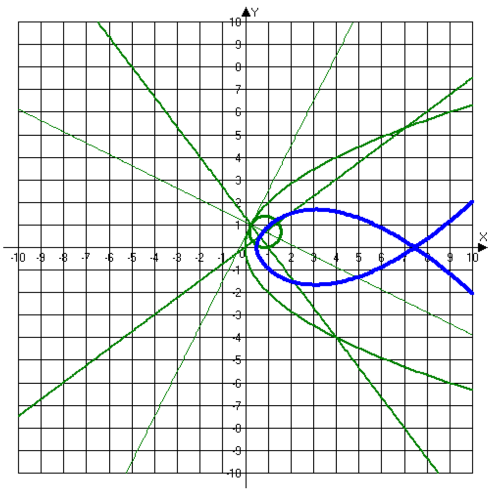

Рис. 4

Студентам доцільно запропонувати знайти ГМТ площини, з яких параболу видно під кутом α, та конкретизувати його при α=60°.

ГМТ визначається як його властивістю, так і простором, в якому воно розглядається. Це демонструють наступні два ГМТ.

Геометричним місцем точок площини, кожна з яких рівновіддалена від точок A і B є пряма, перпендикулярна до відрізка

AB, проведена через його середину. Геометричним місцем точок простору, кожна з яких рівновіддалена від двох даних точок *A* і *B*, є площина *α*, перпендикулярна до відрізка *AB* в його середині *C*.

Студентам доцільно запропонувати наступне завдання: наведіть приклади пар геометричних місць точок, які мають ту саму властивість, але розглядаються відповідно на площині та у просторі.

На третьому етапі формування у студенів навчально-дослідницьких умінь доцільно пропонувати студентам самостійно складати нові ГМТ та досліджувати їх.

Зрозуміло, що під час аудиторних занять викладач має обмежені можливості для формування у студентів навчально-дослідницьких умінь, тому навчально-дослідницька робота студентів переважно здійснюється у позанавчальний час. Однією з провідних форм такої роботи студентів з диференціальної геометрії є гурток.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Отже, для формування у студентів навчально-дослідницьких умінь у курсі диференціальної геометрії (теорії кривих) доцільно спочатку на заняттях досліджувати вже відомі ГМТ (подери, еволюти, евольвенти тощо), а потім пропонувати студентам систему завдань, яка передбачає побудову нових ГМТ. Нові ГМТ можна отримувати шляхом: заміни властивості, якою володіють точки відомого (заданого) ГМТ, або її узагальнення; заміни розмірності простору, в якому розглядаються шукані точки; заміни основної фігури ГМТ. Під час дослідження ГМТ у курсі диференціальної геометрії у студента формуються наступні дослідницькі уміння: складати план виконання того чи іншого завдання, працювати з науковою літературою, набувати навичок критичного відбору й аналізу необхідної інформації, добирати методи дослідження кривих та поверхонь, виділяти окремі випадки у дослідженні кривих, поверхонь та визначати особливості їх дослідження, наводити графічні інтерпретації того чи іншого геометричного факту, порівнювати результати графічного та аналітичного дослідження, застосовувати системи комп'ютерної математики до дослідження кривих та поверхонь, формулювати висновки і врешті презентувати результати дослідження.

Подальшого дослідження потребують методичні рекомендації щодо використання програмних засобів, зокрема програми GeoGebra, у формуванні дослідницьких умінь у студентів під час навчання диференціальної геометрії.

Список бібліографічних посилань

1. Дробиш Л.В., Карпенко Ю.В. Дослідницька діяльність студентів як засіб якісної підготовки фахівців. *Проблеми формування та розвитку інноваційної інфраструктури: європейський вектор – нові виклики та можливості*. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2015. С. 635–636.
2. Бабанский Ю.К. Рациональная организация учебной деятельности. Москва: Знание, 1984. 96 с.
3. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно– исследовательской деятельности. Москва: Высшая школа, 1981. 240 с.
4. Коломієць О.М. Геометричні уміння та їх класифікація. *Вісник Черкаського університету*. 2007. Вип. 111. С. 58–65.
5. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики. Черкаси: Відлуння-плюс, 2002. 400 с.
6. Навчальні програми для 5–9 класів. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas.
7. Навчальні програми для 10–11 класів. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

References

1. Drobysh L., Karpenko Y. (2015). Students' research activity as a means of qualitative training of specialists. *Problems of formation and development of innovative infrastructure: European vector – new challenges and opportunities*. Lviv. 635–636.
2. Babansky K. (1984). Rational organization of training activities. Moscow.96 p.
3. Andreev V. (1981). Heuristic programming of educational and research activities. Moscow. 240 p.
4. Kolomiets O. (2007). Geometric skills and their classification. *Bulletin of Cherkasy University*. Cherkasy. 58–65.
5. Tarasenkova N. (2002). Use of symbolic and symbolic tools in mathematics teaching. Cherkasy. 400 p.
6. Curriculum for 5–9 grades. Retrieved from https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas.
7. Curriculum for grades 10–11. Retrieved from https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

KOLOMIETS Oksana,
PhD in Pedagogy, Associate Professor of Mathematics and Methods of Learning Mathematics Department,
Bohdan Khmelnytsky National University at Cherkassy

BRYNKO Olena,
Master of Science of Mathematics and Teaching Methods in Mathematics Department,
Bohdan Khmelnytsky National University at Cherkassy

FORMATION OF THE RESEARCH SKILLS FOR THE HIGHER EDUCATION ESTABLISHMENTS STUDENTS IN THE FIELD OF MATHEMATICAL SPECIALITIES DURING TEACHING DIFFERENTIAL GEOMETRY

Summary. *Introduction. One of the basic tasks of the differential geometry is studying of different ways to construct curves and their research.*

Purpose. To find out the possibilities of the theory of the curves of the differential geometry course in the formation of students' research skills.

Methods. Taking into account the purpose of the study, among the methods were chosen: theoretical: analysis of domestic and foreign scientific literature; studying and generalizing the experience of mathematics teachers in organizing the extracurricular courses;

empirical: observation of the educational process; questioning of mathematics teachers.

Results. It is defined, that to form the students' research skills it is appropriate at first to research the famous classic geometric places of points (poderas, evolutes, evolvents etc) at the lessons, and later to offer the students a system of tasks implying constructing new geometric places of points.

Conclusion. The articles describes the experience of the studying-research skills for the higher education establishments students in the field of mathematical specialities during teaching differential geometry, namely theory of curves. The new geometric places of points can be received by: replacement of the property, possessed by the known (set) geometric place of points, or its generalization; replacement of the space dimensionality, where the searched points are considered; replacement of the basic figure of the geometric place of points. There are some examples of such tasks in the article. We offer to find the geometric places of points using different methods. It is also appropriate to use programme means, namely the programme GeoGebra. During researching geometric places of points within the course of differential geometry student forms the following research skills: to make up a plan of doing some task, to work with the scientific sources, to gain skills for the critical selection and analysis of the necessary information, to choose the methods for researching curves and surfaces, to differentiate separate cases in researching curves and surfaces and to define the peculiarities of their research, to give graphical interpretations of some geometric fact, to compare the results of the graphical and analytical research, to apply the systems of computer mathematics to the research of curves and surfaces, to formulate the conclusions and finally to present the results of the research.

Keywords: *teaching geometry students; research skills; geometric location of points.*

Одержано редакцією 09.11.2019
Прийнято до публікації 02.12.2019