

 <https://doi.org/10.31651/2524-2660-2023-2-72-81>

 <https://orcid.org/0000-0002-5382-7007>


**МЕЛЬНИЧУК Лілія Михайлівна**

кандидатка фізико-математичних наук, доцентка, доцентка кафедри диференціальних рівнянь,  
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича  
*e-mail*: lilya.melnychuk@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0001-9342-1127>

**КОНДУР Оксана Созонтівна**

докторка педагогічних наук, кандидатка фізико-математичних наук,  
професорка, деканеса педагогічного факультету,  
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника  
*e-mail*: oksana.kondur@pnu.edu.ua

 <https://orcid.org/0000-0001-8480-2702>

**РОМАНИШИН Руслана Ярославівна**

докторка педагогічних наук, професорка, зав. кафедри початкової освіти,  
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника  
*e-mail*: ruslana.romanyshyn@pnu.edu.ua

УДК 37.091.4STEM:004.92(045)

**МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ – ІННОВАЦІЙНИЙ ЕЛЕМЕНТ  
STEM-ОСВІТИ**

*У статті здійснено огляд і аналіз змісту та вибору програмних засобів, які використовуються для вивчення розділу «Комп'ютерна графіка» у закладах загальної середньої освіти (2–11 класи).*

*Запропоновано тематичний план для факультативного курсу «Математичні основи*

*комп'ютерної графіки» та визначено окремі математичні поняття, які є необхідними для вивчення цього предмета.*

*Враховуючи діючу програму з математики для середньої школи, в статті обґрунтовано вікові межі учнів, які зможуть успішно опанувати цей курс.*

Здійснено рекомендацію щодо добровільного впровадження курсу у навчальний процес та його вплив на математичний розвиток здобувачів освіти. Зазначено, що це дозволить забезпечити більш глибоке розуміння математичних принципів, що лежать в основі комп'ютерної графіки, та підготувати учнів до подальшого вивчення STEM-дисциплін.

**Ключові слова:** інформатика; STEM-освіта; інновації; математична підготовка; растрова графіка; векторна графіка; тривимірна графіка.

**Постановка проблеми.** У шкільному курсі інформатики елементи комп'ютерної графіки використовуються у програмах і підручниках кожного класу середньої школи. Завдяки різноманітності своїх можливостей комп'ютерна графіка зі сфери виключно академічного інтересу перейшла в практичну площину та знайшла широке застосування у промисловості, дизайні, архітектурі, телебаченні, кінематографі, анімації, маркетингу, індустрії розваг, веб-дизайні, у розробці графічних інтерфейсів програм тощо. Це сприяє посиленню зацікавленості старшокласників *комп'ютерною графікою*.

Однак у шкільному курсі інформатики навчання комп'ютерної графіки здійснюється на технологічному рівні: навчання зводиться до вивчення тих чи інших програмних засобів без розуміння учнями математичних основ комп'ютерної графіки. Не достатньо розроблена методика вивчення математичних основ комп'ютерної графіки, адже навіть у вибірковий модуль для 10–11 класу «Математичні основи інформатики» не включено теми з математичних основ комп'ютерної графіки. Аналіз науково-методичної літератури засвідчив, що математичній підготовці для ґрунтовного освоєння основ комп'ютерної графіки не приділяється достатньої уваги. Загалом, у посібниках та методичних розробках [10; 11; 12; 13] розглядаються математичні основи інформатики, але не комп'ютерної графіки. Найбільше наповнений математичними поняттями для комп'ютерної графіки підручник [14] призначений для студентів закладів вищої освіти і тому є складним для опанування школярами.

Вивчення математичних основ комп'ютерної графіки цікаве і важливе, оскільки відіграє велику роль у формуванні багатьох ключових компетентностей, які прописані у Державному стандарті базової середньої освіти [9], а саме, математичної компетентності, компетентності в галузі природничих наук, техніки і технологій, компетентності інноваційності, інформаційно-комунікаційної компетентності, компетентностей, що стосуються вільного во-

лодіння державною мовою та здатності спілкуватися іноземними мовами.

Оскільки «працівники майбутнього мають вирішувати проблеми, розуміючи й використовуючи наукові підходи, знаючи технології, якими можна вирішити ці проблеми» [15], то одним із пріоритетів модернізації освіти є посилення ролі STEM-освіти. Вона полягає у розвитку особистості через формування компетентностей, природничо-наукової картини світу, світоглядних позицій і життєвих цінностей з використанням міждисциплінарного підходу до навчання, що базується на практичному застосуванні наукових, математичних, технічних та інженерних знань і вмій для розв'язання практичних проблем для подальшого використання їх у професійній діяльності. Провідним принципом STEM-освіти є інтеграція. Курс математичних основ комп'ютерної графіки є інтеграційним курсом, що поєднує математичні дисципліни (алгебру, геометрію, комбінаторику), інформатику, технології, мистецтво, оскільки при цьому досягаються обов'язкові результати навчання учнів з кількох освітніх галузей, зокрема:

- сприймає і перетворює інформацію математичного змісту, мислить математично; застосовує математичні поняття, факти та послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій; досліджує проблемні ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів; створює математичну модель проблемної ситуації, обирає раціональний шлях її розв'язання (математична освітня галузь);

- буде інформаційні моделі об'єктів, явищ і процесів; розробляє модульні проекти; створює та опрацьовує інформаційні продукти з використанням даних різних типів; використовує широкий спектр цифрових пристроїв (інформатична освітня галузь);

- використовує інформаційне середовище у власній творчості і художній комунікації (мистецька освітня галузь);

- проектує особистісно і соціально значущий виріб (технологічна освітня галузь).

Це означає, що вибір даного курсу сприятиме впровадженню напрямів STEM-освіти.

Всі ці фактори визначають актуальність нашого дослідження.

**Мета статті** полягає в обґрунтуванні необхідності розгляду методичних аспектів вивчення математичних основ комп'ютерної графіки у шкільному курсі інформатики для старшокласників.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Вивчення інформатики у закладах середньої освіти відбувається згідно з навчальними програмами [1; 2; 3; 4], затвердженими Міністерством освіти і науки України. Комп'ютерну графіку вивчають в окремих темах здебільшого в 2, 5, 6 та 9-му класах. Крім того, у 10–11 класах можуть бути обрані вибіркові модулі, пов'язані з комп'ютерною графікою, для її поглибленого вивчення.

Структура навчальних програм з інформатики лінійно-концентрична, тобто зміст понять у кожному наступному класі розширюється і доповнюється, навчальний матеріал поступово ускладнюється, актуалізується, передбачені вправи на повторення та закріплення вивченого. Все це загалом сприяє формуванню предметної та ключових компетентностей учнів, навичок діяльності на вищому рівні узагальнення.

У початковій школі навчання регламентується Типовими програмами Нової української школи (НУШ) [1], згідно з якими інформатична галузь у 2 та 3 класах входить в інтегрований курс «Я досліджую світ».

За типовою програмою О. Савченко, елементи комп'ютерної графіки вивчаються у 2 класі у розділах: «Комп'ютерні програми. Меню та інструменти» (теми: Графічний редактор. Інструменти графічного редактора та їх налаштування. Створення та редагування не складних малюнків. Добір кольорової гама малюнка. Збереження малюнків) та «Створення інформаційних моделей. Змінення готових. Використання» (теми: Перенесення фрагментів малюнка. Виділення і впорядкування даних за певною ознакою. Прості та складені сюжетні геометричні задачі. Копіювання фрагментів малюнку). Крім цього, передбачено додаткові теми про онлайн-графічні редактори та редагування малюнків за допомогою програмного забезпечення смартфонів. З програмного забезпечення запропоновано використовувати графічний редактор (офлайн та онлайн версії), зокрема графічний редактор середовища *Scratch*.

Зауважимо, що у дев'яти підручниках для 2-го класу, рекомендованих МОН України, розглядають графічні редактори *Paint*, *Tux Paint* та графічний редактор середовища *Scratch*.

З 2022–2023 н.р. освітня реформа НУШ почала впроваджуватись у 5–6 класах. Інформатична освітня галузь у цих класах реалізується за запропонованими Міністерством освіти і науки України шістьма авторськими модельними навчальними програмами з інформатики [2]. Результати проведеного нами аналіз змісту цих про-

грам у розрізі тем, які дотичні до комп'ютерної графіки, систематизовано у табл. 1, наведеній нижче.

Оскільки роботу із растровим графічним редактором учні, здебільшого, ґрунтовно практикували у початкових класах, то у 5–6 класах передбачено опанування інструментів роботи із векторною графікою. Зокрема, важливо навчити школярів виконувати операції з окремими об'єктами й їх групами, а також роботи із шарами для створення зображень. При цьому поняття шару можна розглядати як у векторних, так і растрових зображеннях, залежно із обраної траєкторії навчання.

У рекомендованих МОН України близько 10 підручників [5] розглядаються різні графічні редактори: растрові графічні редактори *Paint*, *GIMP*, *Online Photo Editor*, векторні графічні редактори *Inkscape*, *LibreOffice Draw*, *Ooo4Kids Draw*, вбудований векторний редактор у середовищі текстового процесора *MS Word*. Ці програми складніші ніж ті, що пропонувались у початковій школі.

Зауважимо, що у двох нових (2023 р.) підручниках для 6-го класу [5] (автори Й. Ривкінд і О. Бондаренко та ін.) при вивченні векторної графіки дається спрощене поняття кривих Безье та описуються інструменти та найпростіші прийоми для роботи з кривими у графічному редакторі *Krita* та *Inkscape* відповідно. Це зумовлене тим, що у дітей ще немає потрібної теоретичної основи для повнішого вивчення цих кривих.

У 9-ому класі, згідно з діючою навчальною програмою [3], учні вивчають розділ «3D-графіка» (теми: Тривимірна графіка. Класифікація програм для роботи з тривимірною графікою. Принципи тривимірної навігації. Додавання тривимірних примітивів. Переміщення, масштабування, групування, вирівнювання, обертання, копіювання та клонування об'єктів. Екструдвання форми об'єкта. Вершини, ребра, грані. Графічні текстури. Рендеринг тривимірної сцени. Текстові об'єкти та їх редагування. Переміщення по кадрах. Шкала часу. Анімація. Попередній перегляд анімації. Поняття про 3D-друк). У рекомендованих МОН України нових підручниках 2022 року видання [5] запропоновано вивчати 3D-графіку на базі програм тривимірної графіки *Blender* чи *Tinkercad*. Проте у дев'ятикласників ще недостатній рівень математичної підготовки для розуміння найпростіших принципів 3D-графіки, оскільки необхідні геометричні поняття та перетворення в просторі включені до програм зі стереометрії тільки в старших класах.

Теми з комп'ютерної графіки  
у модельних навчальних програмах з інформатики  
для 5–6 класів (2022–2023 н.р.)

№	Модельна програма авторів	Назва розділу	Пропонований зміст
1	Завадський І.О., Коршунова О.В., Лалінський В.В.	Інформаційні моделі. Комп'ютерні презентації (5 клас)	Особливості побудови й опрацювання векторних та зображень. Побудова зображення з графічних примітивів. Операції над графічними об'єктами та групами об'єктів. Багат шарові зображення, розміщення об'єктів у шарах.
2	Морзе Н.В., Барна О.В.	Комп'ютер як інструмент (5 клас)	Поняття про інфографіку. Програмне забезпечення для перегляду графічних зображень. Побудова і опрацювання графічних зображень в різних програмних середовищах та в інтернеті. Растровий графічний редактор та його інструменти. Вставлення графічних зображень та побудова векторних зображень в офісних пакетах. Карти знань.
3	Пасічник О.В., Чернікова Л.А.	Комп'ютерна графіка (5 клас)	Растрові і векторні зображення, їх об'єкти і властивості. Формати файлів растрових і векторних зображень. Прикладні програми для перегляду, обробки та створення графічних зображень. Графічні примітиви та інструменти для побудови об'єктів зображення. Операції над об'єктами та групами об'єктів. Багат шарові зображення, розміщення об'єктів у шарах. Графічні ефекти. Поєднання тексту та графічних зображень.
4	Радченко С.С., Боровцова Є.В.	Комп'ютерна графіка (6 клас)	Поняття комп'ютерної графіки. Растрові та векторні зображення, їхні властивості. Формати файлів растрових і векторних зображень. Налаштування параметрів та перетворення формату готового зображення. Особливості побудови й опрацювання векторних зображень. Побудова зображення з графічних примітивів. Операції над об'єктами та групами об'єктів. Багат шарові зображення, розміщення об'єктів у шарах. Додавання тексту до графічних зображень та його форматування.
5	Ривкінд Й.Я., Лисенко Т.І., Чернікова Л.А., Шакотько В.В.	Графічні зображення (6 клас)	Базові поняття комп'ютерної графіки. Види комп'ютерної графіки. Програми для опрацювання графічних зображень. Створення, редагування і форматування зображень. Шари, їх використання. Додавання тексту до графічних зображень та його форматування.
6	Козак А.З., Ворожбит А.В.	Цифрова творчість. Комп'ютерна графіка (5 клас)	Растрові зображення і їх властивості. Поняття графічного редактора. Формати файлів растрових зображень. Середовище та інструменти графічного редактора. Створення зображень із графічних примітивів для подальшого використання в інших програмах. Розміщення об'єктів у шарах. Операції з фрагментами зображення. Поєднання тексту та графічних зображень. Опрацювання зображень, отриманих з цифрових пристроїв.
		Цифрова творчість. Комп'ютерна графіка (6 клас)	Особливості побудови та опрацювання векторних зображень. Векторний графічний редактор. Формати файлів векторних зображень. Інструменти для побудови об'єктів зображення. Властивості об'єктів. Криві Безье. Операції над графічними об'єктами та групами об'єктів, їх взаємне розміщення. Текст як графічний об'єкт.

Для 8-9 класів до нормативного курсу інформатики передбачено вибірково, зокрема і факультатив з комп'ютерної графіки із поглибленим вивченням предметів технічного (інженерного) циклу [6], навчальна програма до якого схвалена для використання в загальноосвітніх навчальних за-

кладах (лист Інституту модернізації змісту освіти МОНУ від 03.07.2019 № 22.1/12-Г-720) і розрахована на 140 год. Основні завдання цього курсу тісно пов'язані з інженерним профорієнтаційним спрямуванням, адже полягають у засвоєнні комп'ютерної графіки як провідного засобу проектної та

конструкторської діяльності, формуванні практичних умінь і навичок створення й оброблення растрових і векторних графічних зображень, виконанні креслярсько-графічних робіт у середовищі спеціально орієнтованих програмних засобів.

Питання, пов'язані із комп'ютерною графікою, у 10–11 класах розглядаються у затверджених у 2018 році програмах [4] таких вибіркового модуль: «Графічний дизайн», «Комп'ютерна анімація», «Тривимірне моделювання». Крім цього, є ще вибіркового модуль «Математичні основи інформатики», проте до нього не включено теми з математичними основами комп'ютерної графіки.

Задля тіснішої інтеграції математики та інформатики ми пропонуємо до вибіркового частини навчального плану в 10–11 класах включити курс поглибленого вивчення математичних основ комп'ютерної графіки. Цей курс можна використовувати і для позакласної роботи у вигляді факультативу, гуртка тощо.

Для опанування учнями матеріалу запропонованого курсу потрібні такі передбачені навчальною програмою знання:

- з геометрії – види геометричних фігур на площині та в просторі, їх перетворення (паралельне перенесення, поворот, гомотетія, симетрія); прямокутні декартові системи координат на площині та в просторі; вектори на площині та в просторі;

- з алгебри – властивості і графіки функцій, перетворення графіків функцій; дослідження функції за допомогою похідної; тригонометричні вирази та дії над ними;

- з комбінаторики;

- з інформатики – поняття растрової, векторної, 3D графіки, навички користування комп'ютером та використання інформаційних технологій.

Розроблений нами факультативний курс «Математичні основи комп'ютерної графіки» для учнів старших класів розрахований на 36 годин. Метою запропонованої навчальної програми є формування математичних основ комп'ютерної графіки в учнів старших класів для використання інструментів професійного сектора при виконанні реальних практичних завдань.

Тематичний план розробленого факультативного курсу «Математичні основи комп'ютерної графіки» складається з трьох модулів:

Модуль 1. Математичні основи растрової графіки у Adobe PhotoShop (12 год).

1. Інтерфейс графічного редактора *Adobe Photoshop*: робоча область і смуги прокрутки, стрічка заголовку, стрічка меню, палітри, стрічка стану, панелі інстру-

ментів, панель параметрів, контекстне меню програми (1 год.).

2. Геометричні фігури на площині. Перетворення геометричних фігур: паралельне перенесення, поворот, гомотетія, симетрія. Створення зображень інструментами *Adobe PhotoShop* (2 год.).

3. Роздільна здатність графічних зображень. Залежність між розміром та роздільною здатністю зображень. Зміна роздільної здатності та розмірів зображення (1 год.).

4. Формати файлів растрової графіки, їх переваги та недоліки, область застосування. Математичні основи алгоритмів стиснення та декодування (1 год.).

5. Робота зі стилями зображення. Використання палітри «Стилі». Виділення областей правильної та довільної форми. Інструменти виділення. Створення та трансформація виділень. Переміщення виділеної області. Формування виділень за допомогою контурів. Використання палітри «Контур» (1 год.).

6. Інструменти ретушування і зміни експозиції (тонування). Інструмент «Штамп». Інструменти «Розмивання», «Різкість», «Палець». Інструменти тонування (2 год.).

7. Шари в *Adobe Photoshop*. Особливості фонового шару. Палітра «Шари». Налаштування шарів. Властивості шарів. Способи створення, копіювання та видалення шару. Об'єднання шарів (1 год.).

8. Призначення фільтрів. Область застосування фільтрів. Меню «Фільтр». Фільтри для коригування зображень (1 год.).

9. Робота над проєктним завданням (2 год.).

Модуль 2. Математичні основи векторної графіки у Adobe Illustrator (13 год.).

1. Інтерфейс графічного редактора *Adobe Illustrator*: робоча область і смуги прокрутки, стрічка заголовку, стрічка меню, палітри, стрічка стану, панелі інструментів, панель параметрів, контекстне меню програми (1 год.).

2. Поняття про криві другого порядку та криві третього порядку. Поняття точок перегину (2 год.).

3. Криві Безьє. Опорні точки. Побудова кривих Безьє по трьох та чотирьох точках (2 год.).

4. Робота з інструментами «Перо», «Олівець», «Пензлик» (1 год.).

5. Робота з інструментом «Ластик» та «Розпилення символів» (1 год.).

6. Робота з інструментом «Поворот» та «Дзеркальне відображення» (1 год.).

7. Робота з інструментом «Ширина» (1 год.).

8. Робота з інструментом «Сітковий градієнт» (1 год.).

9. Робота з інструментом «Спотворення за допомогою оболонки» (1 год.).

10. Робота над проєктним завданням (2 год.).

**Модуль 3. Математичні основи 3D графіки у Blender** (11 год.).

1. Інтерфейс графічного редактора *Blender*. Головне меню, контекстне меню та панель інструментів. Панель параметрів. Робоча область. Дерево побудови. Рядок стану (1 год.).

2. Поняття про ескіз. Вибір площини ескізу. Системи координат. Локальна система координат. Перетворення координат. Афінні перетворення (1 год.).

3. Вектори. Подання вектора в різних системах координат (1 год.).

4. Лінії у просторі. Геометричні фігури у просторі, їх перетворення (1 год.).

5. Операції створення 3D компонентів: операція видавлювання, операція обертання, кінематична операція, операція створення за перерізами (1 год.)

6. Способи відображення 3D моделей: каркасне, без невидимих ліній, з тонкими невидимими лініями, півтонове, півтонове з каркасом, перспектива, з тінню (2 год.).

7. Керування масштабом відображення графічних зображень (3D моделей) (2 год.).

8. Робота над проєктним завданням (2 год.).

Вивчення кожного розділу завершується виконанням та захистом учнями проєктної роботи. Тематику проєктної роботи учні вибирають самостійно або за рекомендацією вчителя. Після завершення навчання учні отримують сертифікат.

Особливістю курсу «Математичні основи комп'ютерної графіки» є те, що виклад теоретичного матеріалу відбувається на перших заняттях розділу, оскільки спочатку в учнів формуються математичні основи комп'ютерної графіки, а потім проводяться практичні заняття, на яких вивчаються інструменти графічних редакторів *Adobe PhotoShop*, *Adobe Illustrator* та *Blender* та ілюструється використання математичних знань у комп'ютерній графіці. Основними видами діяльності на заняттях пропонуються лекції, бесіди, практикум, консультації, робота з комп'ютером, виконання проєктів.

У роботі [7] наведені розробки деяких методичних матеріалів пропонованого курсу, виконані під керівництвом співавтора публікації Мельничук Л. Під час вивчення нового вибіркового курсу учні знайомляться з новими поняттями: математичні основи алгоритму стиснення зображення; криві другого і третього порядків, поняття точок перегину кривих; криві Безьє (опорні точки, побудова кривих Безьє по трьох та чо-

тирьох точках); перетворення координат і афінні перетворення; просторові лінії, перетворення геометричних фігур у просторі.

Математичною основою растрової графіки є дискретне косинусне перетворення, яке використовується в алгоритмі стиснення зображення формату jpeg. Учні зазначають, що для визначення одновимірного дискретного косинусного перетворення використовується формула:

$$t(k) = c(k) \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cos \frac{\pi(2m+1)k}{2N},$$

де  $0 \leq k \leq N-1$ , де  $s(n)$  – елементи масиву  $N$  вихідних значень,  $t(k)$  – елементи масиву  $N$  перетворених значень, а коефіцієнти  $c(k)$ ,  $0 \leq k \leq N-1$  задаються формулами

$$c(0) = \sqrt{\frac{1}{N}}, \quad c(k) = \sqrt{\frac{2}{N}}.$$

Крім цього перетворення, використовується ще двовимірне косинусне перетворення

$$t(i, j) = c(i, j) \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} s(m, n) \cos \frac{\pi(2m+1)i}{2N} \cos \frac{\pi(2m+1)j}{2N},$$

де  $s(m, n)$  – елементи вихідного двовимірного масиву,  $t(i, j)$  – елементи перетвореного двовимірного масиву,  $c(i, j)$  – коефіцієнти.

Математичні основи векторної графіки – це властивості геометричних фігур, серед яких основною є лінія. Тому векторна графіка ґрунтується на математичному поданні лінії. Учні повторюють рівняння прямої (рівняння з кутовим коефіцієнтом та рівняння прямої, що проходить через дві точки), знайомляться із кривими другого та третього порядку та вивчають, як задати частину (відрізок) прямої чи кривої. Зауважимо, що криві третього порядку є основним об'єктом у векторній графіці, бо ними можна математично описати контури багатьох реальних об'єктів, що нас оточують.

Оскільки при моделюванні гладких кривих, які можна масштабувати до нескінченності, у векторній графіці почали застосовувати спеціальний вид кривих, які називаються кривими Безьє, то факультативним курсом теж передбачено детальніше вивчити їх математичні властивості. Відрізки кривих Безьє – це окремих випадок відрізків кривих третього порядку. Для побудови кривих Безьє використовуються дотичні, які проводяться в точках кінців лінії. Дотичні виконують роль «важелів», які допомагають згинати лінію так, як потрібно. При управлінні дотичною змінюється лінія за рахунок кута нахилу дотичної та її довжини.

Крива Безьє – параметрична крива такого вигляду:

$$A(t) = \sum_{k=0}^n A_k b_{k,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

де  $A(t)$  – довільна точка кривої, що залежить від параметра  $t$ ,  $A_k = A_k(x_k; t_k)$  – опорні точки кривої (їх кількість  $n+1$ ,  $0 \leq k \leq n$ ); функції  $b_{k,n}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$ , де  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Наприклад, кубічна крива Безьє визначається із формули (1) при  $n=4$ :

$$A(t) = (1-t)^4 A_0 + 4(1-t)^3 t A_1 + 6(1-t)^2 t^2 A_2 + 4(1-t) t^3 A_3 + t^4 A_4, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

У неї чотири опорних точки (див. рис. 1).

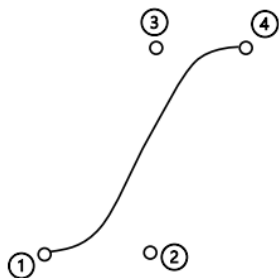


Рис. 1. Кубічна крива Безьє

Учні дізнаються про матричне задання кубічної кривої Безьє. Вчитель має описати властивості кривих Безьє та зауважити, що найбільше значення для моделювання гладких ліній в комп'ютерній графіці мають криві другого та третього степенів (квадратичні і кубічні криві Безьє). Для побудови складних за формою фігур використовуються сплайни Безьє, тобто послідовні з'єднані один з одним відрізки кривих Безьє. У програмах векторної графіки на зразок *Adobe Illustrator* або *Inkscape* подібні фрагменти відомі під назвою «контури».

Математичні основи тривимірної графіки необхідні для побудови об'ємних моделей. Щоб учень міг працювати у програмі для побудови 3D об'єктів, необхідно йому показати, як математично описуються об'єкти у тривимірному просторі. Тому математичну основу тривимірної графіки становлять теми «Системи координат. Локальна система координат. Перетворення координат. Афінні перетворення», «Вектори. Подання вектора в різних системах координат», «Лінії у просторі. Геометричні фігури у просторі, їх перетворення».

Аналізуючи пропонований вище тематичний план курсу, зауважимо, що необхідні знання з математики учні здобувають у різних класах. Наприклад, основні геометричні фігури на площині (точка, пряма, промінь, відрізок, ламана) згадуються ще в початкових класах, хоча рівняння прямої чи відрізка у декартовій системі координат подається лише 7 класі як графік лінійної функції чи у загальному вигляді на уроках геометрії у 9 класі. Поняття про перетво-

рення геометричних фігур, таких як паралельне перенесення, поворот, гомотетія, симетрія, вивчають у 9 класі на уроках геометрії, а відповідні перетворення координат фігури (наприклад, при повороті) не вивчають у шкільному курсі математики. Щодо перетворення графіків функцій, то їх детально вивчають лише у 10 класі в курсі алгебри.

Про системи координат на площині (прямокутну декартову, афінну), координати точки на площині, вектори на площині та дії над ними говориться в курсі геометрії у 9 класі, а відповідні об'єкти в просторі вивчаються в 10 класі. Поняття матриці в школі не наводиться.

Що стосується рівнянь ліній на площині, то їх вивчають у курсі алгебри у 7-11 класах як графіки функцій. Щодо кривих другого та третього порядку, то такі поняття в школі не вводять, хоча вивчають такі частинні випадки: парабола як графік квадратичної функції (8, 9 клас), кубічна парабола (10 клас), гіпербола як обернена пропорційність (8 клас) графіки степеневих функцій (10 класи). Крім того, у курсі геометрії 9 класу розглядають рівняння кола. Рівняння ліній у просторі в шкільному курсі математики не вивчають, як і поняття кривих Безьє, сплайнів Безьє. Учні навіть 9 класу не матимуть необхідної математичної бази для доброго розуміння математичної частини, хоча, безумовно, зможуть ефективно працювати у графічних редакторах.

Учні 10 класу вміють досліджувати функцію за допомогою першої похідної, знають означення та формулу дотичної до графіка функції в точці. Але знаходження проміжків опуклості та точок перегину входить у програму з алгебри лише профільного рівня.

Про математичні основи алгоритмів стиснення та декодування є сенс говорити лише після вивчення тригонометричних функцій та їх властивостей (алгебра, 10 клас).

Ці міркування доводять, що для того, щоб учні в повній мірі осягнули застосування математичних знань при вивченні комп'ютерної графіки, потрібно вводити пропонований факультативний курс лише у старших класах, причому у процесі його вивчення вони знайомляться з новими математичними поняттями та їх властивостями.

Курс математичних основ комп'ютерної графіки забезпечує у найбільшій мірі формування в учнів математичної компетентності та компетентностей в галузі природничих наук, техніки і технологій. Справді, в процесі вивчення використовуються математичні методи для розв'язання задач засобами цифрових технологій, створю-

ються математичні моделі об'єктів комп'ютерної графіки та проводиться дослідження цих моделей; будуються та використовуються інформаційні моделі об'єктів, явищ і процесів для розв'язання проблем реального та віртуального світу, проводяться експерименти і дослідження. У результаті здобувачі освіти усвідомлюють важливість математики як однієї з основ інформаційних технологій.

Ключова компетентність інноваційності полягає у генеруванні та реалізації ідей з використанням цифрових технологій, пов'язаних із застосуванням комп'ютерної графіки як засобу візуалізації. Інформаційно-комунікаційна компетентність розвивається у результаті створення індивідуально або в групі інформаційних продуктів з використанням різних графічних редакторів.

Крім цього, компетентності, що стосуються вільного володіння державною мовою та здатності спілкуватися іноземними мовами, забезпечуються тим, що учні створюють цифрові інформаційні об'єкти та спілкуються державною мовою; використовують відповідну термінологію, пов'язану з математикою та інформатикою; використовують програмні засоби, сервіси і ресурси з інтерфейсом іноземною мовою; оперують міжнародною термінологією у сфері інформаційних технологій.

Проводилося опитування серед студентів бакалаврату Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) стосовно їх бажання вивчати цей курс ще у школі. Позитивно відповіли 69% (29 із 42 опитаних), а 86% (36 із 42 опитаних) відмітили, що цей курс був би дуже корисним для учнів і допоміг би краще розуміти не тільки інформатику, а й математику. Серед студентів заочної та індивідуальної форм навчання, які працюють вчителями, результати були такими: 80% (12 із 15 опитаних) та 93% (14 із 15 опитаних) відповідно.

Водночас, під час впровадження такого математичного курсу важлива мотивація школярів. Адже, як стверджує Оксен Лісовий, «викликати інтерес дитини надзвичайно важко, особливо в нашому технологізованому світі. І це – без урахування загального контексту, в якому живе дитина: інформаційне середовище, колосальний розвиток шоу-бізнесу, зокрема у веб-світі. З усім цим нам потрібно конкурувати за інтерес дитини» [15].

**Висновки і перспективи подальших досліджень.** Встановлено, що впровадження курсу «Математичні основи комп'ютерної графіки» в обов'язкове чи позакласне навчання сприятиме реалізації

напрямів STEM-освіти і є важливим для формування багатьох ключових компетентностей, які зазначені в Державному стандарті базової середньої освіти.

Загалом цей курс вимагає додаткової апробації з метою удосконалення методичних матеріалів та методики викладу. Подальші дослідження можна спрямувати у русло розширення пропонованого курсу шляхом не лише 2D чи 3D моделювання предметів, але і їх створення за допомогою, наприклад, 3D друку.

#### Список бібліографічних посилань

1. Типові освітні програми НУШ для початкових класів: Затв. Наказом № 1272 Міністерства освіти і науки України від 08.10.2019 року. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-pochatkovoyi-shkoli> (дата звернення 21.01.2023).
2. Модельні навчальні програми для 5–6 класів Нової української школи. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoyi-ukrayinskoyi-shkoli-zaprovadzhuyutsya-poetapno-z-2022-roku> (дата звернення 21.01.2023).
3. Навчальні програми для 6–9 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти): Затв. Наказом № 804 Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas> (дата звернення 21.01.2023).
4. Інформатика. Навчальна програма вибірково-обов'язкового предмету для учнів 10–11 класів ЗНЗ (рівень стандарту), чинна з 01.09.2018 р. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/informatika-standart-10-11.docx> (дата звернення 21.01.2023).
5. Шкільні підручники онлайн. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/> (дата звернення 21.01.2023).
6. Навчальна програма курсу «Комп'ютерна графіка 8–9 клас» для закладів загальної середньої освіти з поглибленим вивченням предметів технічного (інженерного) циклу, схвалена 03.07.2019. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/navchalni-programi-kursiv-za-viborom-fakultativiv/10092019/kg89.doc> (дата звернення 01.03.2023).
7. Кулій Д. Розробка факультативного курсу для старшокласників «Математичні основи комп'ютерної графіки»: дипломна робота. Чернівці: ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2021. 86 с. URL: [https://archer.chnu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/3926/Kuliy\\_D.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://archer.chnu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/3926/Kuliy_D.pdf?sequence=1&isAllowed=y) (дата звернення 01.10.2022).
8. Криві Безье. Основні поняття та властивості кривих Безье. *Mathros.net.ua*. URL: <https://www.mathros.net.ua/kryvi-bezje.html> (дата звернення 01.03.2023).
9. Державний стандарт базової середньої освіти. URL: <https://www.kmu.gov.ua/nps/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898> (дата звернення 01.03.2023).
10. Руденко В.Д. Математичні основи інформатики: вибіркового модуль (для учнів 10–11 класів, рівень стандарту). Харків: Вид-во Ранок, 2021. 192 с. (Навчальна література. Серія: Інформатика. Посібники на підтримку вибіркового модулів).



11. Hrybiuk O. Mathematical foundations of advanced informatics: specifics of teaching the course with utilization of the system GRAN and utilization for participant-directed learning. *Теорія і практика управління соціальними системами: філософія, психологія, педагогіка, соціологія*, 2021. № 1. С. 118–131.
  12. Математичні основи інформатики. *Інформатика* 10–11. URL: <https://sites.google.com/view/new-site-for-lesson1011/математичні-основи-інформатики> (дата звернення 01.03.2023).
  13. Математичні основи інформатики. *НАУКОЗАВР*. URL: <https://naukozavr.info/informatuka/matematychni-osnovy-informatyky/> (дата звернення 01.03.2023).
  14. Маценко В.Г. Комп'ютерна графіка: навчальний посібник. Чернівці: Рута, 2009. 343 с.
  15. Шулікін Д. STEM-освіта. *Навчання для майбутнього в Україні*, 2015. URL: <http://iteach.com.ua/news/mass-media/?pid=2621/> (дата звернення 02.05.2023).
- References**
1. Standard educational programs of NUS for primary grades: Approved by Order No. 1272 of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated October 8, 2019. Retrieved 21.01.2023, from <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-pochatkovoyi-shkoli> [in Ukr.].
  2. Model curricula for 5–6 grades of the New Ukrainian School. Retrieved 01.21.2023, from <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoyi-ukrayinskoyi-shkoli-zaprovadzhuyutsya-poetapno-z-2022-roku> [in Ukr.].
  3. Educational programs for grades 6–9 (State standard of basic and full general secondary education: Approved by Order No. 804 of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated 06.07.2017). Retrieved 21.01.2023, from <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas> [in Ukr.].
  4. Informatics. Curriculum of an optional and mandatory subject for students of grades 10–11 of the GEI (standard level), valid from 01.09.2018. Retrieved 21.01.2023, from <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/informatika-standart-10-11.docx> [in Ukr.].
  5. School textbooks online. Retrieved 01.21.2023, from <https://pidruchnyk.com.ua/> [in Ukr.].
  6. The curriculum of the course «Computer graphics 8–9th grade» for institutions of general secondary education with in-depth study of subjects of the technical (engineering) cycle, approved on 03.07.2019. Retrieved 03.01.2023, from <https://mon.gov.ua/storage/app/media/navchalni-programi-kursiv-zavborom-fakultativiv/10092019/kg89.doc> [in Ukr.].
  7. Kuliya, D. (2021). Development of an optional course for high school students «Mathematical basics of computer graphics»: Diploma work. Chernivtsi: CHNU named after Yu. Fedkovicha, 2021. 86 p. Retrieved 10.01.2022, from [https://archer.chnu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/3926/Кулай\\_Д.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://archer.chnu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/3926/Кулай_Д.pdf?sequence=1&isAllowed=y) [in Ukr.].
  8. Bezier curves. Basic concepts and properties of Bezier curves. *Website mathros.net.ua*. Retrieved 03.01.2023, from <https://www.mathros.net.ua/kryvi-bezje.html> [in Ukr.].
  9. State standard of basic secondary education. Retrieved 03.01.2023, from <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898> [in Ukr.].
  10. Rudenko, V.D. (2021). Mathematical foundations of informatics: optional module. (for students of grades 10–11, standard level). Kharkiv: Ranok Publishing House. 192 p. (Educational literature. Series: Informatics. Guides to support optional modules) [in Ukr.].
  11. Hrybiuk, O. (2021). Mathematical foundations of advanced informatics: specifics of teaching the course with utilization of the GRAN system and utilization for participant-directed learning. *Theory and practice of managing social systems: philosophy, psychology, pedagogy, sociology*, 1: 118–131.
  12. Mathematical foundations of informatics. *Website Інформатика* 10–11. Retrieved 03.01.2023, from <https://sites.google.com/view/new-site-for-lesson1011/mathematical-fundamentals-of-informatics> [in Ukr.].
  13. Mathematics foundations of informatics. *Website НАУКОЗАВР*. Retrieved 03.01.2023, from <https://naukozavr.info/informatuka/matematychni-osnovy-informatyky/> [in Ukr.].
  14. Matsenko, V.G. (2009). Computer graphics: Study guide. Chernivtsi: Ruta, 343 p. [in Ukr.].
  15. Shulikin, D. (2015). STEM education. *Education for the future in Ukraine*. Retrieved 05.02.2023, from <http://iteach.com.ua/news/mass-media/?pid=2621/> [in Ukr.].

#### **MELNYCHUK Lilia**

PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Differential Equations,  
Yuri Fedkovich Chernivtsi National University

#### **KONDUR Oksana**

Doctor Sciences of Pedagogy, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Pedagogy,  
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

#### **ROMANISHYN Ruslana**

Doctor Sciences of Pedagogy, Professor, Head of the department of primary education,  
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

### **MATHEMATICAL FUNDAMENTALS OF COMPUTER GRAPHICS – AN INNOVATIVE ELEMENT OF STEM EDUCATION**

**Summary.** Introduction. Elements of computer graphics in the school computer science course are used in programs and textbooks of each grade of high school. Due to the diversity of its possibilities, computer graphics has moved from an academic interest to a practical interest and has found wide application in industry, design, architecture, television, cinematography, animation, marketing, the entertainment industry, web design, in the development of graphical program interfaces, etc. This contributes to increasing the interest of high school students in computer graphics. However, in a school computer science course, computer graphics are taught at the

technological level: learning is reduced to learning one or another software without students understanding the mathematical foundations of computer graphics.

**Purpose.** To justify the need to consider the methodological aspects of studying the mathematical foundations of computer graphics in the school computer science course for high school students.

**Methods.** Analysis of educational and methodological literature, legislative and regulatory documents regulating the secondary education system; generalisation of theoretical and experimental data.

*Results.* The course of mathematical foundations of computer graphics ensures the formation of students' mathematical competence and competences in the field of natural sciences, engineering and technology. In the process of study, mathematical methods are used to solve problems by means of digital technologies, mathematical models of computer graphics objects are created and these models are researched; information models of objects, phenomena and processes are built and used to solve problems of the real and virtual world, experiments and research are carried out. As a result, students realize the importance of mathematics as one of the foundations of information technology.

*Originality.* Based on the analysis of scientific and methodical sources, the need to introduce the optional course «Mathematical foundations of computer graphics» into the educational process of the secondary school was determined, the plan was developed, and certain mathematical concepts were defined.

*Conclusion.* It has been established that the introduction of the course «Mathematical foundations of computer graphics» into compulsory or extracurricular education will contribute to the implementation of STEM education. The impact of this course on the formation of key competencies specified in the State Standard of Basic Secondary Education is shown.

In the future, its approbation and improvement of methodical developments and materials for its support are foreseen. It is advisable to direct further research in the direction of expanding the proposed course by not only 2D or 3D modelling of objects, but also their creation using 3D printing.

**Keywords:** computer science; STEM education; innovations; mathematical training; raster graphics; vector graphics; three-dimensional graphics.

Одержано редакцією 02.06.2023  
Прийнято до публікації 21.06.2023