УДК 378.147.51 **М. В. Третяк**

ОСНОВНІ МЕТОДИЧНІ КОНЦЕПЦІЇ ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ МІРИ І ІНТЕГРАЛА В УНІВЕРСИТЕТАХ УКРАЇНИ

В статті представлені основні науково-методичні концепції вивчення теорії міри і інтеграла в університетах України студентами математичних спеціальностей та з'ясовано співвідношення між ними.

Ключові слова: *міра, інтеграл, університет.*

Постановка проблеми. Курс «Теорія міри і інтеграла» (ТМіІ) під початковою назвою «Теорія функцій дійсної змінної» (ТФДЗ) був уведений до навчальних планів математичних спеціальностей класичних університетів у 20-х роках XX століття. У спогадах О.С.Вентцель (І. Грекової) говориться, що у середині 20-х років ТФДЗ у Санкт-Петербургському державному університеті їм викладав Г. М. Фіхтенгольц. До Дніпропетровського державного університету викладати окремі розділи ТФДЗ, починаючи з 1931 р. приїздив сам А. М. Колмогоров, де і познайомився видатним своїм учнем С. М. Нікольським (академіком РАН). Враховуючи винятково високий рівень централізації всього внутрішнього життя в СРСР, немає підстав думати , що в інших державних університетах було якось по-іншому. У Львівському університеті ТФДЗ, в тім числі теорію інтеграла Лебега почали викладати в 1908 р., коли Вацлава Серпінського було призначено доцентом цього університету. Є відомості, що в Московському університеті різні питання ТФДЗ почали розглядати починаючи з 1910 р. на семінарі, який запровадив Д. Ф. Єгоров. До речі, знаменита теорема Єгорова про зв'язок збіжності майже скрізь із рівномірною збіжністю родом із далекого 1911р. До навчальних планів педагогічних інститутів елементи ТФДЗ були включені в 50-і роки минулого століття. На сьогоднішній день ТМіІ чи, за традиційною назвою, ТФДЗ – невід'ємна складова частина навчальних планів і програм для математичних спеціальностей класичних та педагогічних університетів. Накопичений багатющий досвід вивчення ТМіІ не знімає завдання подальшого вдосконалення як змістового наповнення так і методики навчання ТМіІ. В рамках зазначеного завдання ***проблема з'ясування наявних в університетах України науково-методичних концепцій вивчення ТМіІ та співвідношення між ними*** є актуальною**.** Реалізація різних науково-методичних концепцій вивчення ТМіІ найбільш вдало здійснена в [6; 8; 10].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Порівняння та аналіз навчальних планів і програм з курсу «Теорія міри і інтеграла», які склалися в різних університетах України протягом останнього часу та навчально-методичних матеріалів, що створюють дидактичне забезпечення цих планів і програм, показують, що на сьогоднішній день використовуються три концепції (від лат. *conceptio* – система поглядів на те чи інше педагогічне явище, процес, спосіб розуміння, тлумачення якихось педагогічних явищ [3, с. 177]) викладання ТМіІ студентам математичних спеціальностей. Умовно ці концепції ми назвали: 1) *класичною*; 2) *неокласичною*; 3) *модерною*. Як суто наукові концепції побудови теорії міри і інтеграла, всі вони виникли у зазначеному порядку і з дуже незначним відривом у першій чверті XX-го століття. А як концепції викладання ТМіІ, то класична майже відразу увійшла до вжитку у провідних університетах, а далі поширилася на решту університетів із серйозно поставленим викладанням математики. Що стосується неокласичної концепції, то вона лише у другій половині XX-го століття поступово витісняючи (і то не до кінця) класичну концепцію стала домінуючою у викладанні ТМіІ. Модерна концепція (ґрунтована на схемі Данієля [10]), знайшовши своїх прихильників відразу після виникнення, широкого розповсюдження не набула попри наявність у ній цілого ряду привабливих позитивних рис.

Мета статті – схарактеризувати основні науково-методичні концепції вивчення ТМіІ в університетах України та з'ясувати співвідношення між ними.

Виклад основного матеріалу. Зупинимось коротко на історії питання та схарактеризуємо у загальних рисах кожну із зазначених вище концепцій вивчення ТМіІ. Одним із основних понять аналізу та і всієї математики є поняття інтеграла. Означення інтеграла, завершене в XIX-му столітті Коші та Ріманом, достатнє для розв'язання багатьох задач математики, механіки і фізики. Але для цілого ряду нових актуальних розділів математики, фізики, біології, економічної теорії та ін. воно виявилося недостатнім. По-перше, воно застосовне лише до функцій однієї чи кількох змінних, тоді як у даний час необхідно мати можливість та уміти інтегрувати на многовидах із нескінченновимірних просторів. Цього, зокрема, вимагають теорія ймовірностей, теорія випадкових процесів, теорія рівнянь математичної фізики, гідродинаміка та квантова фізика. По-друге, навіть у випадку однієї чи кількох змінних ріманів інтеграл дає можливість інтегрувати порівняно вузький клас функцій – неперервних, кусково неперервних і деяких інших. Більше того, можна побудувати послідовність (f_n) функцій $f_n:[a,b]\to \mathsf{R}, n\in \mathsf{N}$ таку, що задовольняє «в середньому» умову збіжності Коші, тобто $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}}\int_a^b |f_m(x)-f_n(x)|dx=0$, а ніякої граничної функції серед інтегровних за Ріманом не існує. Таким чином, клас функцій, інтегровних за Ріманом, виявляється неповним. Вимога ж повноти класу інтегровних функцій – необхідна умова практично у всіх областях, що мають справу із сучасним аналізом. По-третє, в означенні інтеграла Рімана область інтегрування лежить у многовиді (прямій, площині тощо), що є фактично однорідним. Це тягне за собою незмінність інтеграла від будь-якої функції при її зсувах. Але при розгляді багатьох питань обставини такі, що область інтегрування не можна вважати однорідною. Іноді цю неоднорідність можна урахувати за допомогою введення змінної густини, наприклад, як це робиться у задачах, пов'язаних з неоднорідною струною. Та цей прийом не завжди спрацьовує (наприклад струна навантажена точковими масами – бусинками).

Загальна концепція інтеграла, створена видатними математиками: Лебегом (насамперед), Борелем, Юнгом, Ф. Рісом, Радоном, Фреше, Каратеодорі, Данжуа, Даніелем, Халмошем, Хінчиним, Колмогоровим [1; 2; 4; 5; 6; 9; 10], не обтяжена указаними недоліками. Вона не потребує скінченновимірності області інтегрування і її однорідності та приводить до достатньо широкого класу інтегровних функцій (повного відносно збіжності в середньому).

Відомо, що існують різні підходи до побудови загальної теорії інтеграла; одні з них, розпочинаються з теорії міри (схема Лебега) [1; 2; 4; 5; 6; 7; 9], інші – з поняття елементарного інтеграла на сукупності елементарних функцій (схема Даніеля) [10]. В кінцевому рахунку обидва підходи еквівалентні. Кожна зі схем Лебега та Даніеля має свої плюси і мінуси. При виборі однієї з них, як основи методичної концепції для побудови навчального курсу ТМіІ, до уваги беруться не тільки суто математичні переваги і недоліки, а й цілий ряд інших факторів: 1) цілі і завдання навчальної дисципліни; 2) рівень фактичних математичних знань студентів; 3) розвиненість абстрактного, логічного, функціонального мислення студентів; 4) кількість часу, відведеного на вивчення курсу ТМіІ; 5) місце курсу ТМіІ в навчальному плані спеціальності (передує функціональному аналізу чи є частиною останнього, має пропедевтику у вигляді елементів ТФДЗ у курсі математичного аналізу чи ні); 6) математико-культурний потенціал курсу при вибраній схемі викладу; 7) усталені традиції викладання математичних дисциплін (математичного та функціонального аналізу, теорії ймовірностей, рівнянь математичної фізики тощо); 8) наявним навчально-методичним забезпеченням; 9) врешті-решт математичними уподобаннями та смаками викладача. Саме ці фактори, на наш погляд, відіграли не останню роль в становленні і утвердженні нинішнього *status quo* (лат. – наявне становище) між *класичною*, *неокласичною* та *модерною* концепціями вивчення ТМіІ в університетах України. Перед тим як коментувати і обґрунтовувати, вище зазначене *status quo*, зробимо роз'яснення щодо пропонованих нами термінів – «класична», «неокласична», «модерна» концепція вивчення ТМіІ.

Класичною ми називаємо концепцію вивчення ТМіІ, якщо вона має наступні ознаки:

1) вивчення ТМіІ відбувається за схемою Лебега:

Міра → Вимірні функції → Інтеграл

2) міроозначення відбувається лише для множин у $\mathrm{R}, (\mathrm{R}^n)$, причому міра означається конструктивно і лише як класична (інваріантна відносно рухів) лебегова міра;

3) вимірність функцій означається через вимірність лебегових множин. Функція $f : A \to \mathrm{R}$ називається вимірною, якщо вимірними є лебегові множини $\{x \in A | f(x) < c\}, c \in \mathrm{R}$;

4) інтеграл Лебега означається як границя лебегівських інтегральних сум: $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i \lambda\{x \in A | y_i \le f(x) < y_{i+1}\}$.

Зауважимо, по-перше, що термін *класична* концепція підкреслює: а) що так будував теорію інтеграла сам Лебег; б) що будується саме класичний лебегів інтеграл; в) саме ця концепція інтеграла зреалізована у класичних підручниках з ТФДЗ, наприклад [8]. По-друге, в пунктах 2), 3) та 4) можуть мати місце незначні модифікації, які не змінюють саму концепцію. Тим самим ми визнаємо, що класична концепція вивчення ТМіІ може мати кілька версій, які мало відрізняються одна від одної.

Неокласичною ми називаємо концепцію вивчення ТМіІ, якщо вона має наступні ознаки: 1)вивчення ТМіІ відбувається за схемою Лебега:

Системи множин → Міра → Вимірні функції → Інтеграл

2) означення міри – аксіоматичне, теорія міри – абстрактна, загальна, застосовна до просторів довільної природи. Вимірність множин означається одним із трьох класичних способів (Лебега, Валле-Пуссена – Колмогорова, Каратеодорі) через посередність зовнішньої міри; 3) вимірність функцій означається або через вимірність лебегових множин, або зводиться до загального означення вимірності в термінах систем множин. Нехай $(X, \mathscr{S}), (Y, \mathscr{T})$ – вимірні простори, $A \in \mathscr{S}$. Відображення $f : A \to \mathrm{R}$ називається $(\mathscr{S}, \mathscr{T})$-вимірним, якщо $f^{-1}(\mathscr{T}) \subset \mathscr{S}$; 4) інтеграл означається через посередність інтегральних сум, або, найчастіше, – через прості функції.

Зауважимо, що термін *неокласична* концепція підкреслює, що:

а) дана концепція багатьма своїми рисами нагадує *класичну* концепцію – свою попередницю; б) до створення і утвердження цієї концепції доклалися неокласики математики: Фреше, Валле-Пуссен, Каратеодорі, Колмогоров та ін.; в) від попередниці її вигідно відрізняють велика загальність, широка застосовність, багатство ідей, потужність і перспективність методів; г) саме ця концепція представлена у світових математичних «бестселерах» [4; 6; 9].

Модерною називаємо концепцію вивчення ТМіІ, якщо передбачається використання схеми Даніеля:

Елементарний інтеграл → Нуль-множини → Інтеграл Даніеля → Вимірні функції, вимірні множини

Зазначимо також, що терміном *модерна* концепція ми хотіли підкреслити: а) незвичність, оригінальність, несподіваність, штучність цієї концепції; б) її абстрактність, загальність, ефективність і економність; в) її спорідненість з функціональним аналізом – однією із самих модерних теорій, що визначали математичне обличчя ХХ-го століття.

Неокласична та *модерна* концепції вивчення ТМіІ також допускають цілий ряд версій, які зустрічаються в університетах України.

Виходячи із формальних міркувань, можна допустити існування концепцій вивчення ТМіІ, відмінних від розглянутих вище *класичної, неокласичної та модерної*. Проте виявити такі в практиці українських університетів не вдалося. Наше пояснення цьому факту: розглянуті вище *класична, неокласична* та *модерна* концепції дуже добре продумані, збалансовані, бездоганні в науково-методичному виконанні, підкріплені колосальним авторитетом «батьків-засновників», а тому важко знайти їм альтернативи.

Наведемо наші аргументи, що пояснюють існуюче співвідношення між *класичною, неокласичною* та *модерною* концепціями. Збереження *класичної* концепції вивчення ТМіІ у невеликій кількості педагогічних університетів зумовлене, на нашу думку, більшою мірою: а) цілями і завданнями навчальної дисципліни; б) недостатньою кількістю часу, відведеного на вивчення ТМіІ; в) невисоким рівнем фактичних математичних знань студентів; г) недостатньою розвиненістю абстрактного. логічного, та функціонального мислення студентів, і меншою мірою: д) усталеними традиціями викладання математичних дисциплін та е) математичними уподобаннями викладачів.

Схема Даніеля має цілий ряд дуже привабливих рис: загальність, економність універсальність, швидкість приведення до мети. Мабуть саме цими обставинами був викликаний відомий вислів Н. Вінера (1933) «В ідеальному курсі з теорії інтеграла Лебега всі теореми установлювались би з точки зору інтеграла Даніеля» [10, с. 6]. Однак, як концепція університетського викладання ТМіІ, широкого поширення вона не набула. Причини такого становища ми вбачаємо у тому, що: а) згідно з діючими у багатьох університетах навчальними планами курс ТМіІ передує курсу функціонального аналізу; б) недостатнім рівнем розвитку абстрактного, логічного та функціонального мислення студентів; в) традиціями викладання математичних дисциплін (великою зацікавленістю у *неокласичній* концепції викладання ТМіІ з боку теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та ін.); г) найголовніше, низьким порівняно з *неокласичною* концепцією математико-культурним потенціалом. Розділи «Системи множин» і, особливо, «Міра» мають велике самоцінне значення для формування математичної культури студентів. Саме в цих розділах, значною мірою, знаходять своє втілення змістові лінії: теоретико-множинна лінія, функціональна лінія та лінія міри. Значно більш повчальними, інформативними, цікавими з математико-культурної точки зору стають розділи «Вимірні функції», «Інтеграл».

Висновки. Основними науково-методичними концепціями вивчення ТМіІ в класичних та педагогічних університетах України студентами математичних спеціальностей є так звані *класична, неокласична* та *модерна* концепції; *неокласична* концепція вивчення ТМіІ цілком заслужено домінує в університетах України; головною причиною домінування *неокласичної* концепції є її найвищий порівняно з іншими концепціями математико-культурний потенціал.

Роботу виконано за підтримки МОН України (держ. реєстрац. номер 0115U000639).

Список використаної літератури

1. Березанский Ю. М. Функциональный анализ. Курс лекций : учеб. пособие / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – К. : Выща шк., 1990. – 600 с.

2. Богачев В. И. Основы теории меры. Том 1 / В. И. Богачев. – М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 584 с.

3. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / С. У. Гончаренко. – К. : Либідь, 1997. – 376 с.

4. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Щварц. – М. : Издательство иностранной литературы, 1962. – 896 с.

5. Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. – К. : Выща шк. Головное изд-во, 1989. – 152 с.

6. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544 с.

7. Лянце В. Лекції з теорії міри й інтеграла Лебега / В. Лянце, Т. Кудрик, Г. Чуйко. – Львів : Видавничий центр Львівського національного університету ім. І. Франка, 1999. – 112 с.

8. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

9. Халмош П. Теория меры / П. Халмош : пер. с англ. под ред. С. В. Фомина. – М. : Изд-во «Факториал Пресс», 2003. – 256 с.

10. Шилов Г. Е. Интеграл, мера и производная / Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 220 с.

Одержано редакцією 17.04.2015 р.
Прийнято до публікації 21.05.2015 р.

Аннотация. Третяк Н. В. *В статье представлены основные научно-методические концепции изучения теории меры и интеграла в университетах Украины студентами математических специальностей и выяснено соотношение между ними.*

Ключевые слова: *мера, интеграл, университет.*

Summary. Tretyak N. Main methodological conceptions in the study of «Theory of measure and integral» at Ukrainian universities. *Comparison and analysis of curriculums and programs of discipline «Theory of measure and integral» (TMI) which are used in Ukrainian universities nowadays permit to indicate three main conceptions of teaching of TMI for students of mathematical specialties. We propose a following classification of such conceptions: 1) classical approach; 2) neoclassical approach; 3) modern approach.*

Classical conception is characterized by following features: 1) study of TMI occurs by using the Lebesgue scheme; 2) definition of measure takes place only for sets, and measure is defined structurally and only as classical Lebesgue measure; 3) measurability of functions is defined only through measurability of Lebesgue sets; 4) Lebesgue integral is defined as limit of Lebesgue integral sums.

Term «classical conception» points: a) way in which the theory of integral was built by Lebesgue; b) that just classical Lebesgue integral is built; c) that such conception of integral is applied in classical textbooks.

Term «neoclassical conception» is used if: 1) study of TMI occurs by using the Lebesgue scheme; 2) definition of measure is axiomatic, theory of measure is abstract, general and can be applied to spaces of arbitrary nature. Measurability of functions is defined by using one of the three classical ways (Lebesgue, Vallée Poussin, Caratheodory) by using outer measure; 3) measurability of functions is defined through measurability of Lebesgue sets or through terms of set systems; 4) integral is defined by average of integral sums or through simple functions.

We use term «modern conception» in order to point following aspects: a) the singularity and unexpectedness of this conception; b) abstruse character, generality, efficiency and economy; c) its affinity with functional analysis which is one of the most modern theories of mathematics of XX century. At Ukrainian universities the neoclassic conception of study of TMI is prevailing.

Keywords: *measure, integral, university*.