УДК 514 **О. Г. Демченко, Т. С. Бережна, В. П. Пастушенко**

РІВНОВІДДАЛЕНІСТЬ ВІД КОЛА Й ГІПЕРБОЛИ

Знайдено параметричні рівняння лінії, точки якої рівновіддалені від кола і гіперболи, заданих неявними рівняннями. Досліджено різні випадки взаємного розташування кола і гіперболи.

Ключові слова: *відстань від точки до заданої лінії, рівновіддаленість, параметричні рівняння лінії, неявне рівняння лінії.*

Постановка проблеми. Серед метричних властивостей геометричних фігур виокремлюється властивість рівновіддаленості. Необхідність вивчення цієї властивості постає, коли порівнюються відстані від деяких точок метричного простору [12] до інших його точок.

Найпростіші випадки рівновіддаленості вивчаються у шкільному курсі геометрії [2]: рівновіддаленість від заданої точки; від двох і трьох заданих точок; від двох прямих. Відповідні геометричні місця точок (ГМТ) досліджуються елементарними методами [2].

Однак, вже рівновіддаленість від точки і прямої потребує для вивчення застосування координатного методу і тому відноситься до курсу аналітичної геометрії [1; 6]. Вивчення ж рівновіддаленості від заданої точки і довільної лінії стало предметом окремих досліджень[13].

Рівновіддаленість від точки і лінії другого порядку досліджено у роботах [3; 5; 9]. Тут встановлено, зокрема, що властивості відповідних ГМТ залежать від взаємного розташування точки і заданої лінії, тому різні такі випадки розглядаються окремо.

Потім було знайдено загальні параметричні рівняння ГМТ рівновіддалених від точки і довільної лінії, заданої параметрично або неявно [3]. На основі знайдених рівнянь досліджено геометричні місця точок, рівновіддалених від заданої точки і лемніскати Бернуллі [7], від заданої точки і гіперболи [9].

Рівновіддаленість від двох довільних ліній досліджено тільки в окремих випадках: рівновіддаленість від двох кіл [5], від прямої й параболи [4], від кола й параболи [8], від кола й еліпса [11]. Загальні параметричні рівняння знайдено тільки для ГМТ, рівновіддалених від кола і лінії, заданої неявно [10].

Мета статті полягає у тому, щоб знайти параметричні рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від кола і гіперболи та дослідити різні випадки взаємного розташування заданих ліній.

Виклад основного матеріалу. *Задача формулюється так:* знайти параметричні рівняння лінії точки які рівновіддалені від кола $u^2+v^2=R^2$ і гіперболи $u^2-v^2=d^2$.

Розв'язання. Використовуємо загальні параметричні рівняння ГМТ, рівновіддалених від кола $u^2+v^2=R^2$ і лінії, заданої неявно: $F(u,v)=0$ [10].

$$\begin{cases} x = u + \dfrac{1}{2}\dfrac{u^2+v^2-R^2}{uF_u+vF_v \pm R\sqrt{F_u{}^2+F_v{}^2}}\cdot F_u, \\[2ex] y = v + \dfrac{1}{2}\dfrac{u^2+v^2-R^2}{uF_u+vF_v \pm R\sqrt{F_u{}^2+F_v{}^2}}\cdot F_v. \end{cases}$$

У знаменниках дробів беруться одночасно верхні або нижні знаки.

У нашому випадку: $F_u=2u$; $F_v=-2v$; $uF_u+vF_v=2u^2-2v^2=2a^2$;

$F_u^2+F_v^2=4(u^2+v^2)$,

Тому попередня система зводиться до такої

$$\begin{cases} x = u + \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2 - u^2 - v^2}{a^2 \pm R\sqrt{u^2+v^2}} \cdot u, \\ y = v - \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2 - u^2 - v^2}{a^2 \pm R\sqrt{u^2+v^2}} \cdot v. \end{cases} \quad (1)$$

Кожну з двох наявних систем досліджуємо окремо:

$$\text{I.} \begin{cases} x = u + \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2 - u^2 - v^2}{a^2 + R\sqrt{u^2+v^2}} \cdot u, \\ y = v - \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2 - u^2 - v^2}{a^2 + R\sqrt{u^2+v^2}} \cdot v. \end{cases} \quad (2)$$

Розглядаємо різні випадки взаємного розташування кола і гіперболи.

А) коло і гіпербола не перетинаються $(R < a)$.

Точки перетину лінії з осями координат:

а) $x = 0$; тоді $u\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2-u^2-v^2}{a^2+R\sqrt{u^2+v^2}}\right) = 0$.

Якщо $u = 0$, то $-v^2 = a^2$, що не можливо, тому

$$1 + \frac{1}{2}\frac{R^2-u^2-v^2}{a^2+R\sqrt{u^2+v^2}} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{1}{2}\frac{R^2-u^2-v^2}{a^2+R\sqrt{u^2+v^2}} = -1.$$

За цієї умови $y = 2v, a$ останнє рівняння після заміни змінної $\sqrt{u^2+v^2} = r \geq 0$ зводиться до квадратичного $r^2 - 2Rr - 2a^2 - R^2 = 0$, яке має один додатковий корінь

$$r = R + \sqrt{2a^2 + R^2} \quad (3)$$

Для знаходження v маємо систему

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = r^2 \\ u^2 - v^2 = a^2 \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$2v^2 = r^2 - a^2 = \left(R + \sqrt{2(a^2+R^2)}\right)^2 - a^2 = R^2 + 2R\sqrt{2(a^2+R^2)} + 2a^2 + 2R^2 + a^2 =$$

$$= a^2 + R^2 + 2R\sqrt{2(a^2+R^2)} + 2R^2 = \left(\sqrt{2(a^2+R^2)} + R\sqrt{2}\right)^2.$$

Звідси дістаємо: $y = 2v = \pm\left(2R + \sqrt{2(a^2+R^2)}\right)$.

Отже, у випадку $R < a$ лінія перетинає вісь OY у двох точках (4). (4)

б) $y=0$, тоді $v = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2-u^2-v^2}{a^2+R\sqrt{u^2+v^2}}\right) = 0$.

Якщо $v=0$, то $u = \pm a$, тоді з першого рівняння системи (2) знаходимо

$$x = \pm a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2-a^2}{a^2+aR^2}\right) = \pm a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R-a}{a}\right) = \pm\frac{a+R}{2}.$$

Якщо $1 - \frac{1}{2}\frac{R^2-u^2-v^2}{a^2+R\sqrt{u^2+v^2}}$ =0, то позначивши $r = \sqrt{u^2+v^2} \geq 0$, дістанемо рівняння $r^2 + 2Rr + 2a^2 - R^2 = 0$, яке при $R < a$ має від’ємний дискримінант і тому дійсних коренів немає.

Отже, задана системою (2) лінія перетинає вісь OX у двох точках $x = \pm\frac{R+a}{2}$.

Асимптоти. Досліджувана лінія (2) має нескінчені вітки$\left(x, y \to \infty,\right.$ якщо $\left. u, v \to \infty\right)$. знайдемо послідовно при $u, v \to \infty$:

$$K = \lim \frac{4}{x} = \lim \frac{v}{u}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2 - u^2 - v^2}{a^2 + R\sqrt{u^2 + v^2}}\right) : \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2 - u^2 - v^2}{a^2 + R\sqrt{u^2 + v^2}}\right).$$

Оскільки границя відношення зазначених у дужках виразів дорівнює (–1), а $\frac{u}{v} \to \pm 1$ ($v = \pm u$ – асимптоти гіперболи), то K= –1, якщо u і v одного знаку, і K= 1, якщо u і v – різних знаків; у першому випадку $u\sim -v$, у другому $u\sim +v$.

В обох випадках маємо:

$$y - kx \sim v\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2 - u^2 - v^2}{a^2 + R\sqrt{u^2 + v^2}}\right) + v\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2 - u^2 - v^2}{a^2 + R\sqrt{u^2 + v^2}}\right) = 2v \to \infty,$$ тому

задана системою (2) лінія асимптот не має.

Особливі точки. Особливі точки знаходимо з умови:

$$dx=0 \text{ і } dy=0,$$

де x, y визначаються рівностями (2).

Покладемо у цих рівностях $\sqrt{u^2 + v^2} = r \geq a$. Тоді система (2) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} x = u(1 + \varphi(r)), \\ y = v(1 - \varphi(r)), \\ \varphi(r) = \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{d^2 + Rr} \end{cases} \tag{5}$$

Тепер знаходимо послідовно:

$$\begin{cases} dx = du(1 + \varphi(r)) + ud(\varphi(r)) = 0, \\ dy = dv(1 - \varphi(r)) - vd(\varphi(r)) = 0. \end{cases}$$

Із одержаної системи виключаємо $d(\varphi(r))$, дістаємо

$$vdu(1 + \varphi(r)) + udv(1 - \varphi(r)) = 0 \ . \tag{6}$$

Оскільки $u^2 - v^2 = a^2$, то $rudu - rvdv = 0,\ du = \dfrac{vdv}{u}$. Підставивши цей вираз в рівняння (6) , матимемо $v^2 dv(1 + \varphi(r)) + u^2 dv(1 - \varphi(r)) = 0$.

Звідси знаходимо, що $u^2 + v^2 + (v^2 - u^2)\varphi(r) = 0$.

Оскільки $u^2 + v^2 = r^2$, а $u^2 - v^2 = a^2$, то

$$r^2 - a^2 \cdot \varphi(r) = 0$$

Беручи до уваги останню рівність системи (5), дістанемо рівняння

$$r^2 - \frac{1}{2}a^2\frac{R^2 - r^2}{a^2 + Rr} = 0, \tag{7}$$

або те саме, що: $2Rr^3 + 3a^2r^2 - a^2R^2 = 0,\ r \geq a.$

За умови $R < a$ і $r \geq a$ останнє рівняння розв'язків не має, бо при цьому ліва частина додана:

$$2Rr^3 + 3a^2r^2 - a^2R^2 > 2R \cdot a^3 + 3a^2a^2 - a^2R^2 = 2Rr^3 + 2a^4 + a^2(a^2 - R^2) > 0 \tag{8}$$

Лінія, задана системою (2), особливих точок не має. Геометричне зображення цієї лінії при $a=1,\ R=\dfrac{1}{2}$ подано на рисунках 1 і 2.

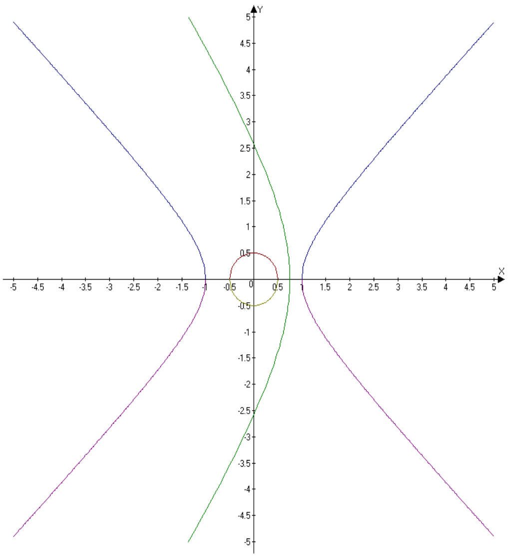

Рис. 1

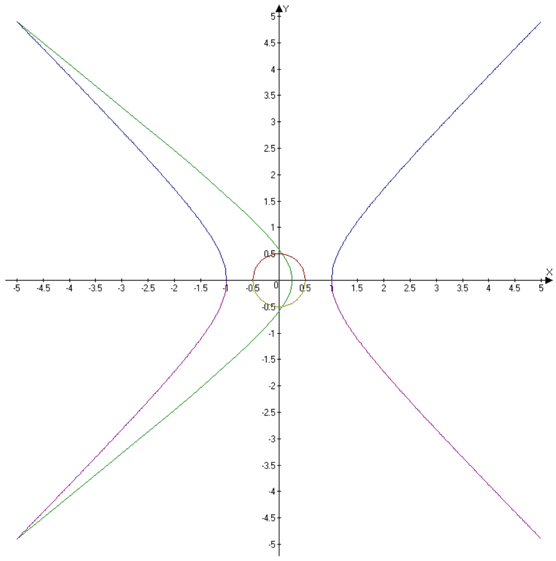

Рис. 2

Б) Коло і гіпербола перетинаються (*R*>*a*). У цьому випадку маємо дві точки перетину з віссю *OУ*: $y=\pm\left(2R+\sqrt{2(a^2+R^2)}\right)$

і чотири точки перетину з віссю *OX*: $x_{1,2}=\pm\dfrac{a+R}{2}$; $x_{3,4}=\pm\left(-\sqrt{2(R^2-a^2)}+2R\right)$.

Як і в попередньому випадку досліджувана лінія асимптот і особливих точок не має. Геометричне зображення лінії для *a=1*, *R=2* представлено на рисунках 3 та 4.

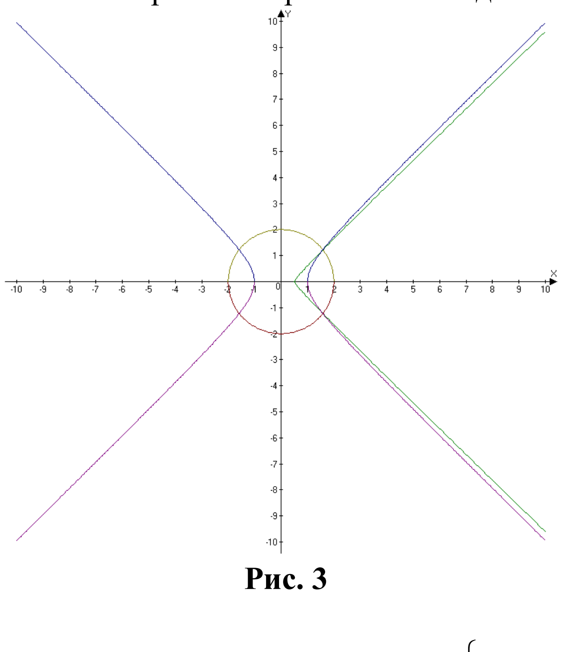

Рис. 3

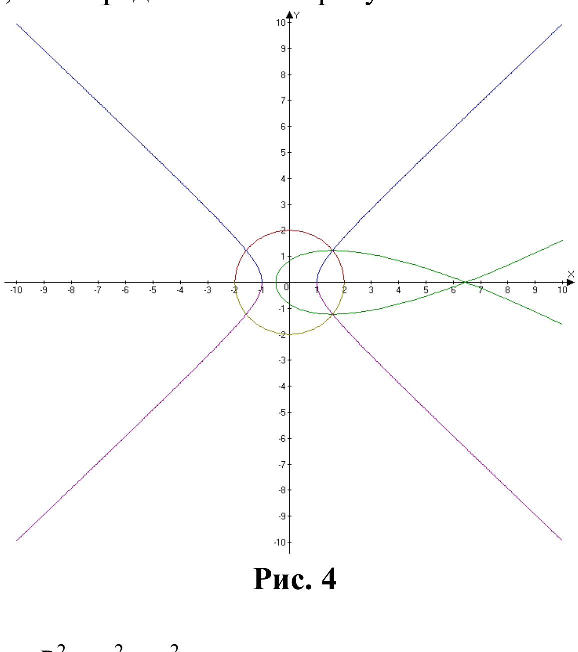

Рис. 4

$$II.\begin{cases} x=u+\dfrac{1}{2}\dfrac{R^2-u^2-v^2}{a^2-R\sqrt{u^2+v^2}}\cdot u, \\ y=v+\dfrac{1}{2}\dfrac{R^2-u^2-v^2}{a^2-R\sqrt{u^2+v^2}}\cdot v. \end{cases} \qquad (9)$$

А) $R<a$ (коло знаходиться зовні гіперболи). Точки перетинаються з осями координат.

а) Якщо $x=0$, то $u=0$ або $1+\frac{1}{2}\frac{R^2-u^2-v^2}{a^2-R\sqrt{u^2+v^2}}=0$

У першому випадку $0-v^2=a^2$, що не має місця; у другому маємо.

Покладемо $\sqrt{u^2+v^2}=r$, тоді

$\frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{a^2-Rr}=-1;$ або $2a^2-2Rr+R^2-r^2=0,\ r^2+2Rr-2a^2-R^2.$ Оскільки $r=0$, то $r=-R+\sqrt{2(a^2+R^2)}=\sqrt{u^2+v^2}$.

Беручи до уваги, що $u^2-v^2=a^2$, знаходимо:

$$2v^2=r^2-a^2=\left(-R+\sqrt{2(a^2+R^2)}\right)^2-a^2=\left(\sqrt{a^2+R^2}-R\sqrt{2}\right)^2-a^2;$$

$$2v=\pm\left(\sqrt{2(a^2+R^2)}-2R\right).$$

Таким чином, лінія (8) має дві точки перетину з віссю OY:

$$y=\pm\left(\sqrt{2(a^2+R^2)}-2R\right).$$

б) Якщо $y=0$, то $v=0$ або $\frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{a^2-Rr}=1$.

У першому випадку $u=\pm a$, тоді

$$x=\pm a\left(1+\frac{R^2-r^2}{a^2-Ra}\right)=\pm\frac{a-R}{2}.$$

У другому випадку маємо рівняння $R^2-r^2=2a^2-2Rr$, яке при $R<a$ коренів не має. Отже, якщо $R<a$, то лінія (8) перетинає вісь OX у двох точках:

$$x=\pm\frac{a-R}{2}.$$

Асимптоти. Для кривої, заданої системою (8), $x,y\to\infty$, якщо $a^2-Rr\to 0$, тобто, якщо $r\to\frac{a^2}{R}=r_0$.

У даному випадку:

а) $$\frac{y}{x}=\frac{v}{u}\frac{2(a^2-Rr)-(R^2-r^2)}{2(a^2-Rr)+(R^2-r^2)}\to-\frac{v}{u}\Big|_{r=\frac{a^2}{R}}.$$

Значення виразу справа знаходимо із системи

$$\begin{cases} u^2+v^2=r^2=\frac{a^4}{R^2},\\ u^2-v^2=a^2. \end{cases}$$

Після додавання і віднімання рівнянь останньої системи, дістанемо:

$$\begin{cases} 2u^2=\frac{a^4}{R^2}+a^2,\\ 2v^2=\frac{a^4}{R^2}-a^2. \end{cases} \tag{9}$$

Звідси

$$\frac{v^2}{u^2}=\frac{a^2-R^2}{a^2+R^2};\ \frac{u}{v}=\pm\sqrt{\frac{a^2-R^2}{a^2+R^2}}.$$

Отже,

$$k = \lim_{r \to r_0} \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{a^2 - R^2}{a^2 + R^2}}.$$

б) $y - kx = v\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr}\right) - ku\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr}\right) = (v - ku) - (v + ku) \cdot \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr}.$

Якщо $r \to \frac{a^2}{R}$, то:

1) $v - ku \to \pm\frac{a}{R}\sqrt{2(a^2 - R^2)}$;

2) $v + ku \to 0$;

3) $R^2 - r^2 \to \frac{(R^2 - a^2)(R^2 + a^2)}{R^2}$,

4) $a^2 - Rr \to 0$.

За правилом Лопіталя

$$\lim_{r \to r_0} \frac{v + ku}{a^2 - Rr} = \lim_{r \to r_0} \frac{v'_u + k}{-Rr'_u} = \lim_{r \to r_0} \frac{\frac{u}{v} + k}{-R\frac{2u}{r}} = \lim_{r \to r_0} \frac{u + vk}{-2Ruv} r = -\frac{aR\sqrt{2}}{(a^2 + R^2)\sqrt{a^2 - R^2}}.$$

Остаточно маємо:

$$b = \lim_{r \to r_0} (y - kx) = \pm\left(\frac{a}{R}\sqrt{2(a^2 - R^2)} - \frac{aR\sqrt{2}}{(a^2 + R^2)\sqrt{a^2 - R^2}}\frac{1}{2}\frac{(a^2 - R^2)(a^2 + R^2)}{R^2}\right)$$
$$= \pm\frac{a}{2R}\sqrt{a^2 - R^2}$$

Рівняння асимптот:

$$y = kx + b = \pm\left(\sqrt{\frac{a^2 - R^2}{a^2 + R^2}}x + \frac{a}{2R}\sqrt{a^2 - R^2}\right).$$

Відрізки на осях координат:

$$x_0 = \mp\frac{a}{2R}\sqrt{2(a^2 + R^2)}; \qquad y_0 = \pm\frac{a}{2R}\sqrt{2(a^2 - R^2)}.$$

Якщо, наприклад, $a = 1$; $R = \frac{1}{2}$, то асимптоти мають рівняння

$$y = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Особливі точки. Знаходження особливих точок зводиться до розв’язання рівняння (6):

$$r^2 - a^2\varphi(r) = 0, \text{де } \varphi(r) = \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr}.$$

Отже, маємо рівняння: $r^2 - a^2\frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr} = 0,$

Яке після очевидних перетворень набуває вигляду: $2Rr^3 - 3a^2r^2 + a^2R^2 = 0.$

Останнє рівняння досліджується за відомою схемою [14]:

1) $r = t + \frac{a^2}{2R}$;

$$2R\left(t^3 + 3\frac{a^2}{2R}t^2 + 3\frac{a^2}{4R^2}t + \frac{a^6}{8R^3}\right) - 3a^2\left(t^2 + \frac{a^2}{R}t + \frac{a^4}{4R^2}\right) + a^2R^2 = 0.$$

$$t^3 - \frac{3a^4}{4R^2}t + \left(\frac{a^2R}{2} - \frac{a^6}{4R^3}\right) = 0 \qquad (*)$$

2) Дискримінант останнього кубічного рівняння:

$$D = \left(-\frac{a^4}{4R^2}\right)^3 + \left(\frac{2a^2R^4 - a^6}{8R^3}\right)^2 = \frac{a^4}{16R^2}(R^4 - a^4).$$

Знак дискримінанта і кількість дійсних коренів рівняння визначається знаком різниці у правій частині останньої рівності.

Якщо $R < a$, то кубічне рівняння (*) має три дійсні корені; якщо $R > a$ – то один дійсний корінь; якщо $R = a$ – то рівняння має один простий дійсний корінь і один двохкратний.

У випадку $R < a$ корені рівняння (*) знаходимо за формулою [14]

$$t = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3}, k = 0,1,2,$$

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}},\ \cos\varphi = -\frac{q}{2\rho}.$$

Якщо, наприклад, $a = 1, R = \frac{1}{2}$, то

$$\rho = -3, q = -\frac{7}{4}, \rho = 1, \cos\varphi = \frac{7}{8};$$

$$\varphi = 29°; t_0 = 1{,}97; t_1 = -1{,}27; t_2 = -0{,}69.$$

Відповідні значення r

$$r = t + 1; r_0 = 2{,}97; r_1 = -0{,}27; r_2 = 0.31.$$

Оскільки у нас $r \geq a = 1$, то $r = 2{,}97$.

$$2u^2 = r^2 + a^2 = 9{,}821; u = 2{,}21;$$

$$2v^2 = r^2 - a^2 = 7{,}821; v = 1{,}97;$$

$$x_{\text{о.т.}} = u\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr}\right) = 21{,}73;\ y_{\text{о.т.}} = v\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr}\right) = 15{,}43.$$

Кутовий коефіцієнт в особливій точці:

$$K_{\text{о.т.}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{о.т.}} = -0{,}907;$$

Відповідне графічне зображення ліній подано на рисунку 5.

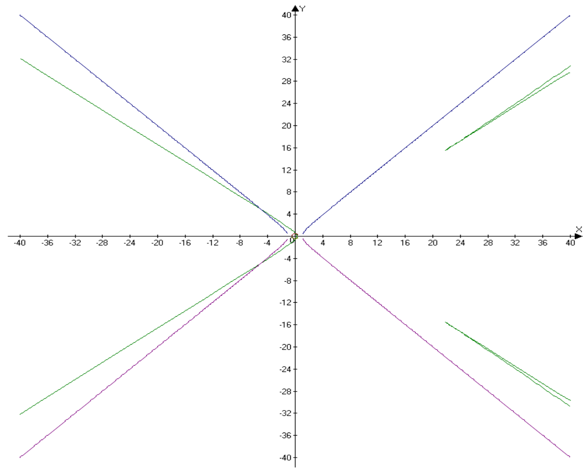

Рис. 5

В) Коло і гіпербола дотикаються ззовні $(a = R = 1)$.

У цьому випадку маємо:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}u(3+r), \\ y = \frac{1}{2}v(1-r), \\ r = \sqrt{u^2+v^2}, \\ u^2 - v^2 = 1. \end{cases}$$

Оскільки $|u| \geq 1, r \geq 1$, то $x \neq 0$ (задана попередньою системою лінія не перетинається з OY).

Якщо $y = 0$, то $v = 0$ або $r = 1$.

У першому випадку $u = \pm 1, r = 1, x = \pm 2$; у другому випадку $u^2 - v^2 = 1 = u^2 + v^2$, звідки знову ж таки $v = 0, u = \pm 1, x = \pm 2$.

Отже, $x = \pm 2$ – подвійна точка перетину з OX. Особливі точки знаходимо з рівняння (*) при $R = a == 1$:

$$2r^3 - 3r^2 + 1 = 0; r_1 = r_2 = 1; r_3 = -\frac{1}{2}.$$

Якщо $r = 1$, то $v = 0; u = \pm 1$ і тоді $x = \pm 2, y = 0$, тобто $x_{\text{о.т.}} = \pm 2; y_{\text{о.т.}} = 0$.

Кутовий коефіцієнт дотичної в особливій точці:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-r)dv - vdr}{(3+r)du + udr} = \frac{r(1-r) - 2v^2}{r(3+r) + 2u^2} \cdot \frac{dv}{du} = \frac{r(1-r) - 2v^2}{r(3+r) + 2u^2} \cdot \frac{u}{v}$$

(тут враховано, що для гіперболи $u^2 - v^2 = 1$ $\frac{dv}{du} = \frac{u}{v}$).

В особливій точці останній вираз не визначений $\left(\frac{0}{0}\right)$. Невизначеність розкриваємо з використанням правила Лопіталя:

$$\lim_{v\to 0}\frac{r(1-r) - 2v^2}{v} = \lim_{v\to 0}\frac{(1-2r)r'_v - 4v}{1} = \lim_{v\to 0}\left((1-2r)\frac{2v}{r} - 4v\right) = 0.$$

Отже, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{о.т.}} = 0$: вісь OX є дотичною до кривої в особливій точці. Особливі точки є точками звороту першого роду (рис.).

Асимптот досліджувана крива не має.

Б) Коло і гіпербола перетинаються $(R > a)$.

а) Точки перетину з осями координат

1) Якщо $x = 0$, то дістанемо рівняння:

$$1 + \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr} = 0,$$
$$2a^2 - 2Rr + R^2 - r^2 = 0,$$
$$r = -R + \sqrt{2(a^2 + R^2)}.$$

Оскільки $u^2 - v^2 = a^2, r^2 = u^2 + v^2$, то

$$\left(-R + \sqrt{2(a^2+R^2)}\right)^2 = 2r^2 + a^2, 2r^2 = \left(\sqrt{a^2+R^2} - R\sqrt{2}\right)^2,$$

$$\sqrt{2}v^2 = \pm\left(\sqrt{a^2+R^2} - R\sqrt{2}\right) = R\sqrt{2} - \sqrt{a^2+R^2}; 2v = \pm\left(2R - \sqrt{2(a^2+R^2)}\right).$$

Отже, досліджувана лінія перетинає вісь OY у двох точках:

$$y == \pm\left(2R - \sqrt{2(a^2+R^2)}\right).$$

Якщо, наприклад, $a = 1, R = 2$, то $y = \pm 0{,}84$.

2) Якщо $y = 0$, тоді $v = 0$ або $1 - \frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{a^2-Rr} = 0$.

У першому випадку $u = \pm a, r = a, x = \pm a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr}\right) = \pm\frac{R-a}{2}$.

У другому випадку $\frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{a^2-Rr} = 1$, а $x = 2u$.

Необхідне значення u знаходимо із системи:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{a^2 - Rr} = 1, \\ u^2 + v^2 = r^2, \\ u^2 - v^2 = a^2, \\ r \geq a. \end{cases}$$

$$v^2 = u^2 - a^2;\ r^2 = 2u^2 - a^2.$$

З першого рівняння системи знаходимо:

$$r = R \pm \sqrt{2(R^2 - a^2)}.$$

Умову $r \geq a$ задовольняє тільки

$$r = R + \sqrt{2(R^2 - a^2)}.$$

Тоді

$$x = 2u = \pm\left(2R + \sqrt{2(R^2 - a^2)}\right).$$

Отже, за умови $R > a$ лінія, що визначається системою II, має дві точки перетину з віссю OY:

$$y_{1,2} == \pm\left(2R - \sqrt{2(a^2 + R^2)}\right)$$

та чотири точки перетину з віссю OX:

$$x_{1,2} = \pm\frac{R-a}{2}, x_{3,4} = \pm\left(2R + \sqrt{2(R^2 - a^2)}\right).$$

Асимптоти можливі за умови $r = \frac{a^2}{R} \geq a$. У нашому ж випадку $a < R, \frac{a^2}{R} < a$, тому асимптот немає.

Особливі точки. Як і в попередньому випадку, знаходження особливих точок зводиться до розв'язання кубічного рівняння:

$$t^3 - \frac{3a^4}{4R^2}t + \left(\frac{a^2R}{2} - \frac{a^6}{4R^3}\right) = 0, r = t + \frac{a^2}{2R},$$

дискримінант якого

$$D = \frac{a^4}{16R^2}(R^4 - a^4) > 0, (R > a).$$

Рівняння має один дійсний корінь.

Якщо, наприклад, $R = 2, a = 1$, то попереднє рівняння набуває вигляд:

$$t^3 - \frac{3}{16}t + \frac{31}{32} = 0;$$

$$D = \frac{15}{26};\ t = -1{,}0526;\ r = t + \frac{1}{4} = -0{,}8026 < 0.$$

Отже, особливих точок у цьому випадку немає (рис. 6, рис. 7).

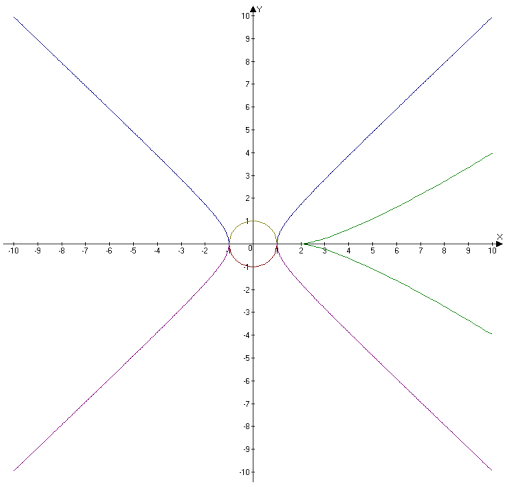

Рис. 6

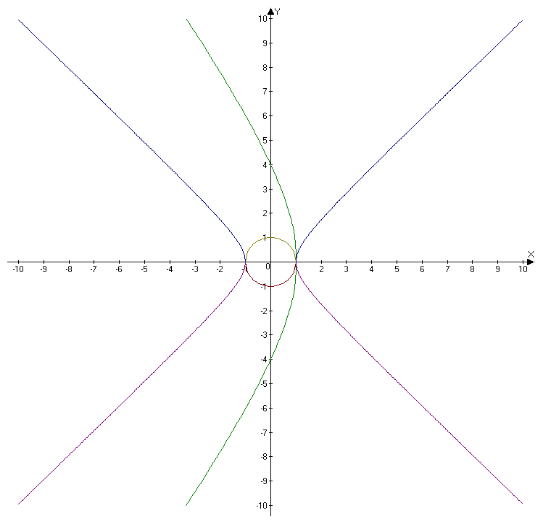

Рис. 7

Список використаної літератури

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С.Александров. – М.: Наука, 1968. – 912 с.
2. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загально- освіт. навч. закл. / М. І. Бурда , Н. А. Тарасенкова – К.: Зодіак-ЕКО, 2007.– 208 с.
3. Демченко О. Г. Вивчення властивості рівновіддаленості від точки і заданої лінії / О. Г. Демченко, К.С. Запорожець // Вісник Черкаського університету № 26 (279). – Серія Педагогічні науки, 2013. – с. 28-32.
4. Демченко О. Г. Геометричне місце точок, рівновіддалених від параболи і прямої / О. Г. Демченко, О. М. Коломієць // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. праць. – Вип.35. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2011. – с. 83-86.
5. Демченко О. Г. Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох кіл / О. Г. Демченко // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2012. – Випуск № 8 (221). – С. 28–32.
6. Демченко О. Г. Деякі геометричні місця точок, пов'язані з поняттям відстані від точки до множини/О. Г. Демченко // Дидактика математики : проблеми і дослідження. – Донецьк: ДонНУ, 2008, Вип. 29.-С.100-103.
7. Демченко О. Г. Деякі задачі на знаходження геометричного місця точок, рівновіддалених від заданої точки і лінії / О. Г. Демченко, В. П. Пастушенко // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Випуск № 26 (319). – С. 79–85.
8. Демченко О. Г. Геометричне місце точок, рівновіддалених від кола і параболи / О. Г. Демченко //Матеріали міжнародної науково – методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО - 2013), м. Черкаси, 8 – 10 квітня 2013 р. – Черкаси: видавець Чабаненко Ю., 2013 – 300 с.
9. Демченко О. Г. Рівновіддаленість від заданої точки і гіперболи / О. Г. Демченко, К. І. Тупікіна // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2013. – Випуск № 8 (301). – С. 91–98.
10. Демченко О. Г. Рівновіддаленість від кола і заданої лінії / О.Г. Демченко, Т.С. Бережна, В.П. Пастушенко // Вісник Черкаського університету № 8 (221). – Серія Педагогічні науки, 2012. – С. 28-32.
11. Демченко О. Г. Рівновіддаленість від кола та еліпса / О. Г. Демченко, Т. С. Бережна // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Випуск № 26 (319). – С. 20–25.
12. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.И. Фомин. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
13. Погорелов А.И. Дифференциальная геометрия / А. И. Погорелов. М., Наука, Физматлит, 1974. – с.176.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – Т. 1. – М.: Наука, 1974. – 475 с.

Одержано редакцією 17.04.2015 р.
Прийнято до публікації 21.05.2015 р.

Аннотация. Демченко А. Г., Бережна Т. С., Пастушенко В. П. Равноудаленность от окружности и гиперболы. *Найдены параметрические уравнения линии, точки какой равноудалены от окружности и гиперболы, заданных неявно. Исследовано разные случаи взаимного расположения окружности и гиперболы.*

Ключевые слова: *расстояние от точки до заданной линии, равноудаленность; параметрические уравнения линии; неявное уравнение линии.*

Summary. Demchenco O., Berezhna T., Pastushenko V. Equidistant from the circle and hyperbola. *The paper found parametric equations locus equidistant from the circle and hyperbola given canonical equations. The above properties have lines that are written by two different systems of parametric equations. Each of these systems is investigated separately. Different cases the relative position of the circle and hyperbola, circle located outside hyperbole; circle and hyperbola touches the outside; circle and hyperbola intersect. In all these cases, found the point of intersection of the lines studied coordinate axes, investigated the presence of asymptotes of singular points and more. Found equation which satisfy specific terms, if any, in all cases the relative position of the circle and hyperbola. Established that there asymptote only one of the possible cases when located outside the range of hyperbole, and the right of parametric equations finite poles. In the case of external contact of the circle and hyperbola and the presence of finite poles investigated curve has singular points - points back of the first kind. At these points the OX axis is tangent to the curve.*

Keywords: *distance from a point to a given line equidistant; parametric equations of the line; the implicit equation of the line.*

УДК 37.091.3

Н. Г. Підліснича

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Здійснено аналіз психолого-педагогічної літератури щодо місця й ролі прийомів розумової діяльності в процесі навчання математики. Розглянуто різні класифікації прийомів розумової діяльності. Виокремлено прийоми розумової діяльності, формування та розвиток яких у процесі вивчення математики має важливе значення. Схарактеризовано теоретичні основи формування прийомів розумової діяльності учнів у процесі навчання математики.

Ключові слова: *прийоми розумової діяльності, навчання математики, розвиток мислення, продуктивне мислення, критичне мислення.*

Постановка проблеми. Мислення є основою свідомої діяльності людини. Воно має бути процесом цілеспрямованим, дійовим. Добре розвинене мислення дає можливість швидко орієнтуватися в тій чи іншій ситуації, зрозуміти її причини і можливий розвиток, володіти обставинами, усвідомлювати закономірності в цілому.

Одним із завдань освітньої галузі «Математика» є розвиток логічного, критичного і творчого мислення учнів, здатності чітко й аргументовано формулювати і висловлювати думки [1].

Однією із цілей навчання математики є розумовий розвиток учнів, який охоплює розвиток логічного мислення, просторових уявлень, алгоритмічної культури, як особливого аспекту культури мислення, пам'яті, уваги, інтуїції, вмінь аналізувати, класифікувати, узагальнювати, робити умовиводи за аналогією тощо. Вивчення математики створює широкі можливості для розвитку пам'яті, логічного і критичного мислення, інтуїції, уяви, уваги, наполегливості, навичок контролю і самоконтролю тощо [9].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У психолого-педагогічних дослідженнях, виконаних нині в Україні, встановлено, що прийоми розумової