УДК 372

АЙВАЗЯН Эдвард Ишханович,
доктор педагогических наук, доцент,
доцент Ереванского государственного университета,
главный специалист Национального института образования
МОН Республики Армения
e-mail: ayvazyan.51@mail.ru

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ НЕКОТОРЫМ ОБОБЩЕНИЯМ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Данная работа посвящена применению научного метода исследования – «аналогии» в преподавании математики. В ней также демонстрируется практический способ применения одного из методов сотрудничества в практике преподавания.

Ключевые слова. *методы научного исследования; аналогия; распознавание; сравнение; обобщение; индукция; дедукция; сотрудничество в обучении.*

Аналогия (греч. *analogia* – соответствие) – сходство нетождественных объектов в некоторых сторонах, качествах, отношениях. Умозаключение по аналогии – вывод о наличии определенных признаков на основании фиксации сходства, существующего в некоторых других признаках. Обычная схема умозаключения по аналогии такая.

Объект B обладает признаками a, b, c, d, e.

Объект C обладает признаками b, c, d, e.

Следовательно, объект C, вероятно, обладает признаком a [1, с. 13].

Аналогия играет важную роль при выдвижения гипотез, как средство уяснения проблемы и направления ее решения. Так, например, Х. Гюйгенс на основании аналогии свойств света и звука пришел к выводу о волновой природе света, а Дж.К. Максвелл распространил этот смелый вывод на характеристику электромагнитного поля и т.д. Тем не менее, считается, что рассматривая изолированно, аналогия не имеет большой доказательной силы не только потому, что вывод по аналогии всего лишь вероятен, но и потому, что степень подобной вероятности может быть небольшой в результате случайного сходства или фиксации несущественных признаков сравниваемых объектов [1, с. 14].

В целях существенного повышения вероятности вывода по аналогии в философии выдвигаются следующие требования: 1) аналогия должна основываться на существенных признаках и, по возможности, на большем числе сходных свойств сравниваемых объектов; 2) связь признака, относительно которого делается вывод, с обнаруженными в объектах общими признаками должна быть возможно более тесной; 3) аналогия не должна вести к заключению о сходстве объектов во всех признаках; 4) вывод по аналогии должен дополняться исследованием различий и доказательством того, что эти различия не могут служить основанием отказа от выводов по аналогии [2, с. 8].

В вышеупомянутой работе [2] отмечено, что аналогия как в математике, так и в ее преподавании, в основном выступает в сочетании с другими методами научного познания, какими являются сравнение, индукция и дедукция. Причем, в процессах мышления и обучения они действуют в тесной связи.

Однако умозаключения по аналогии существенным образом отличаются от умозаключений по индукции и дедукции. В этом смысле А.И. Уемов эти умозаключения разделяет на две группы.

Так, например, в одной из них классы предметов, к которым относятся посылки и заключение, совместимы. Более того, один из них является подклассом (подмножеством) другого. К подобному типу выводов относятся индукция и дедукция.

В другой группе, к которой относится аналогия, классы предметов, к которым относятся посылки и заключение, различны. Таким образом, *«Аналогия – умозаключение, в котором заключение относится к другому предмету, чем тот, о котором говорится в посылке»* [3, с. 19].

Аналогия может также играть определенную роль в процессе математической деятельности школьников, такой как эвристический метод обучения. Она может также подсказать существование некоторого нового утверждения, который, однако, пока что является гипотезой и нуждается в утверждении – доказательстве. Аналогия также может подсказать способ доказательства, направление решения и т. д.

Известный методист математик В.В. Репьев отмечает, что роль аналогии в педагогическом процессе двояка: она или выступает как положительный эвристический фактор, или при легкомысленном использовании ведет ученика к ложным заключениям, которые не обосновываются, не проверяются, а применяются к решению задач и примеров [4, с. 69].

Следуя В.В. Репьеву и нашему опыту преподавания в средней школе, можем констатировать, что как положительный эвристический фактор аналогия может оказать помощь в следующих трех направлениях: а) она может навести учащихся на открытие нового для них предложения и помочь сформулировать его; б) она может дать указания о выборе метода (приема) доказательства предложения; г) она может оказать помощь в поиске путей решения задачи.

Теперь приведем пример применения аналогии из опыта преподавания школьной геометрии.

Один из последних уроков закрепления знаний и умений учащихся по теореме Пифагора, посвящаю обобщению этой теоремы. Учащимся предлагаю на основе аналогии исследовать связь между площадями произвольных правильных многоугольников и кругов, а также площадей поверхности и объемов шаров, построенных на сторонах треугольника. Отметим, что стороны треугольника являются сторонами построенных на них правильных многоугольников, а для кругов и шаров – диаметрами.

Целесообразно применять метод сотруднического обучения – “прогулка по галерее”. С этой целью учащихся класса необходимо заранее разделить на шесть разнородных групп. Первой группе предлагаю исследовать связь между площадями равносторонних треугольников, второй группе – равносторонних пятиугольников, третьей группе – равносторонних шестиугольников, четвертой – площадями кругов, пятой – площадями поверхности шаров, а шестой – объемов шаров, построенных вышеуказанным способом на сторонах прямоугольного треугольника.

Время выполнения заданий для каждой группы – 20 минут. В это время группы исследуют задания и после завершения работы итоги исследований записывают на специальных полотнах (например, на половинках бумаг формата A_1), а адвокат группы вешает этот плакат в удобном месте на стенах класса. Презентация итогов работ всех групп, как мы отметили, исполняется методом сотруднического обучения – «прогулка по галерее». С этой целью составляются новые «экспертные группы», которые по очереди подходят к ним в течении 3-х минут; один из представителей основной группы дает разъяснения остальным членам экспертной группы. Затем все группы протекают в одном и том же направлении, например, стоящая у первого полотна – группа скользит ко второй, стоящая у второго – к третьей и т.д. Таким образом, все учащиеся класса знакомятся с результатами шести групп.

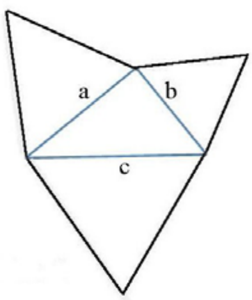
Ниже представим основное содержание всех шести полотен.

Группа 1.

Предположим катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза – c (рис. 1).

Площади построенных на них равносторонних треугольников обозначим соответственно S_1, S_2, S_3.

Тогда



$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad S_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}, \quad S_3 = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Рис. 1

Следовательно,

$$S_1 + S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = S_3 .$$

Таким образом, сумма площадей равносторонних треугольников, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе треугольника.

Группа 2

Предположим, катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза – c (рис. 2). Площади построенных на них равносторонних пятиугольников обозначим соответственно S_1, S_2, S_3. Тогда

$$S_1 = \frac{5a^2}{4}\cdot \mathrm{tg}54^\circ, \quad S_2 = \frac{5b^2}{4}\cdot \mathrm{tg}54^\circ, \quad S_3 = \frac{5c^2}{4}\cdot \mathrm{tg}54^\circ.$$

Следовательно,

$$S_1 + S_2 = \frac{5a^2}{4}\cdot \mathrm{tg}54^\circ + \frac{5b^2}{4}\cdot \mathrm{tg}54^\circ = \frac{5}{4}\cdot \mathrm{tg}54^\circ (a^2 + b^2) =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot \mathrm{tg}54^\circ \cdot c^2 = \frac{5c^2}{4}\cdot \mathrm{tg}54^\circ = S_3.$$

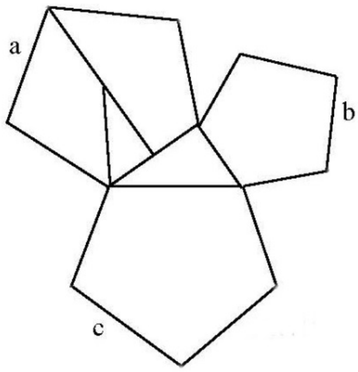


Рис. 2

Таким образом, сумма площадей равносторонних пятиугольников, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади равностороннего пятиугольника, построенного на гипотенузе треугольника.

Группа 3

Предположим катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза – c (рис. 3). Площади построенных на них равносторонних шестиугольников обозначим соответственно S_1, S_2, S_3. Тогда

$$S_1 = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}, \quad S_2 = \frac{6b^2\sqrt{3}}{4}, \quad S_3 = \frac{6c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Значит, аналогично,

$$S_1 + S_2 = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = \frac{6\sqrt{3}}{4}\cdot c^2 =$$

$$= \frac{6c^2\sqrt{3}}{4} = S_3.$$

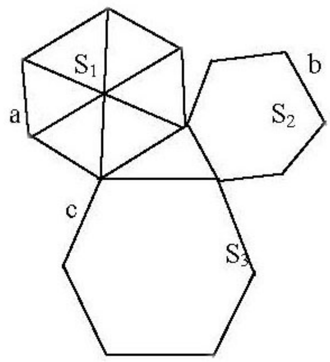


Рис. 3

Таким образом, сумма площадей равносторонних шестиугольников, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади равностороннего шестиугольника, построенного на гипотенузе треугольника.

Группа 4

Предположим катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза – c (рис. 4). Приняв стороны треугольника a, b, c в качестве диаметров, построим на них круги (полукруги), площади этих кругов (полукругов) обозначим соответственно S_1, S_2, S_3. Тогда

$$S_1 = \frac{\pi a^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi b^2}{4}, \quad S_3 = \frac{\pi c^2}{4}.$$

Значит, аналогично,

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} = \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{4}\cdot c^2 = \frac{\pi c^2}{4} = S_3.$$

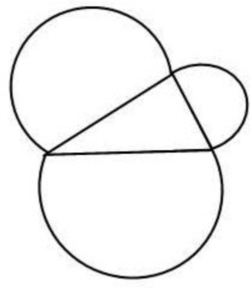


Рис. 4

Дл полукругов имеем следующее:

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{8}\cdot c^2 = \frac{\pi c^2}{8} = S_3.$$

Таким образом, сумма площадей кругов (полукругов), построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади круга (полукруга), построенного на гипотенузе треугольника.

Группа 5

Предположим катеты прямоугольного треугольника равны a и b, a гипотенуза – c. Приняв стороны треугольника a, b, c в качестве диаметров, построим на них сферы (полусферы), площади поверхностей этих шаров (полушаров) обозначим соответственно S_1, S_2, S_3. Тогда,

$$S_1 = 4\pi a^2, \quad S_2 = 4\pi b^3, \quad S_3 = 4\pi c^3 \text{ – для шаров и, соответственно,}$$

$$S_1 = \frac{4\pi a^2}{2} = 2\pi a^2, \quad S_2 = \frac{4\pi b^3}{2} = 2\pi b^3, \quad S_3 = \frac{4\pi c^3}{2} = 2\pi c^3 \text{ – для полушаров.}$$

Значит, аналогично,

$$S_1 + S_2 = 4\pi a^2 + 4\pi b^2 = 4\pi(a^2 + b^2) = 4\pi c^2 = S_3 \text{– для шаров и}$$

$$S_1 + S_2 = 2\pi a^2 + 2\pi b^2 = 2\pi(a^2 + b^2) = 2\pi c^2 = S_3 \text{– для полушаров.}$$

Таким образом, сумма площадей поверхностей шаров (полушаров), построенных на катетах, как на диаметрах прямоугольного треугольника, равна площади поверхности шара (полушара), построенного таким же образом на гипотенузе треугольника.

Группа 6

Предположим катеты, прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза – c. Приняв стороны треугольника a, b, c в качестве диаметров, построим на них шары (полушары), обьемы этих шаров (полушаров) обозначим соответственно V_1, V_2, V_3. Тогда

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4\pi a^3}{24} = \frac{\pi a^3}{6}, \qquad V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{4\pi b^3}{24} = \frac{\pi b^3}{6},$$

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^3 = \frac{4\pi c^3}{24} = \frac{\pi c^3}{6}.$$

Однако,

$$V_1 + V_2 = \frac{\pi a^3}{6} + \frac{\pi b^3}{6} = \frac{\pi}{6}(a^3 + b^3) \neq \frac{\pi}{6}a^3, \text{ поскольку } a^3 + b^3 \neq a^3.$$

Так, например, при a=4, b=3, c=5 имеет место $4^2 + 3^2 = 5^2$ (по теореме Пифагора), но $4^3 + 3^3 \neq 5^3$, поскольку $4^3 + 3^3 = 64 + 27 = 91 \neq 125 = 5^3$.

Таким образом, если стороны прямоугольного треугольника принять в качестве диаметров, то для построенных на них таким образом объемов шаров (полушаров) подобная теореме Пифагора аналогия дает неверный результат.

Таким образом, учащиеся всего класса приняли активное участие в групповых исследованиях и узнали, что

а) сумма площадей правильных многоугольников, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади правильного многоугольника, построенного на гипотенузе треугольника;

б) сумма площадей кругов (полукругов), построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади круга (полукруга), построенного на гипотенузе треугольника;

в) сумма площадей поверхностей шаров (полушаров), построенных на катетах, как на диаметрах, прямоугольного треугольника, равна площади поверхности шара (полушара), построенного таким образом на гипотенузе треугольника.

Особенно важно специально подчеркнуть результат, полученный шестой группой, а именно, что *нельзя положительные результаты первых пяти групп по аналогии распространить на объемы шаров, построенных вышеуказанным способом на сторонах прямоугольного треугольника.*

Список использованной литературы

1. Философский словарь. – М. : Изд-во Политической литературы, 1981. – 445 с.
2. Айвазян Э.И. Аналогия в учебном процессе математики [на арм. языке] / Э.И. Айвазян // Математическое образование: Труды республиканской научной конференции, 23–24 октября, 2014. – С. 7–14.
3. Уемов А.И. Аналогия в практике научного исследования / А.И. Уемов. – М., 1970. – 264 с.
4. Репьев В.В. Общая методика преподавания математики / В.В. Репьев. – М., Учпедгиз, 1958. – 223 с.

References

1. Philosophical Dictionary. (1981). Moscow: Political Literature Publishing House. (in Russ.).
2. Ayvazyan, E.I. (2014). The analogy in the learning process of Mathematics [in Armenian language]. *Mathematical Education: Proceedings of the Republican Scientific Conference, 23-24 October, 7–14.* (in Arm.).
3. Uyomov, A.I. (1970). The analogy in the practice of scientific research. Moscow. (in Russ.).
4. Repev, V.V. (1958). Common methods of teaching mathematics. Moscow: Uchpedgiz. (in Russ.).

AYVAZYAN Edvard,
Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Yerevan State University,
chief specialist of the National Institute of Education Ministry of Education of the Republic of Armenia
e-mail: ayvazyan.51@mail.ru

ANALOGY IN THE TEACHING PROCESS OF MATHEMATICS

Abstract. *The work deals with the usage and the teaching methodology of the scientific research "analogy" in Mathematics. The connection between stable mathematical mistakes and analogy, as well as the integral essence of analogy in the discipline "Natural Science" are revealed here.*

Key word: *methods of scientific research; analogy; recognition; comparison; synthesis; induction; deduction; cooperation in training.*

Одержано редакцією 04.05.2016
Прийнято до публікації 18.05.2016